

# CUADERNILLO DE MATEMÁTICAS 4

---

## IV

SEMESTRE



Nombre: \_\_\_\_\_

Grupo: \_\_\_\_\_

## **Directorio**

Dr. Rafael Ignacio Romero Mayo

**Director General**

Mtra. Yolanda del Rosario Loría Marín

**Directora Académica**

Lic. Mario Velázquez George

**Subdirector Académico**

Mtra. Cindy Jazmín Cuellar Ortiz

**Jefa del Departamento de Docencia y Apoyo Académico**

### **Elaboración, revisión y aprobación:**

Ing. Gaspar Be Xool, **Docente del Plantel Cancún Cuatro**

Lic. Carlos Mariel Chan Ramayo, **Docente del Plantel Cancún Dos**

Ing. María Emilia Francisco Pérez, **Docente del Plantel Cancún Uno**

Ing. Karla Guadalupe Castillo Cua, **Docente del Plantel Cozumel**

### **Revisión y Actualización:**

Mtro. Carlos Alberto Ortega Quezada, **Docente del Plantel Cancún Dos**

### **Edición de archivos:**

Ing. Wendy Guadalupe Brito García, **Docente del Plantel Cancún Uno**

Mtra. Jessica Vianey Cortés Talamantes, **Jefa de Materia del Área de Matemáticas**

### **Diseño de portada:**

Lic. Juan Naim Góngora Piña, **Responsable del Área de Comunicación y Difusión**

Derechos reservados

© Colegio de Bachilleres del Estado de Quintana Roo 2020, 2021

Avenida Héroes #310 entre Justo Sierra y Bugambilias

Col. Adolfo López Mateos

Chetumal, C.P. 77010, Othón P. Blanco, Quintana Roo



# PRESENTACIÓN

Estimada y estimado estudiante:

Me es grato darte la bienvenida al nuevo semestre que estás por iniciar. En la Dirección General del Colegio de Bachilleres de Quintana Roo, somos conscientes de las circunstancias que te rodean y que han afectado al mundo desde hace más de año y medio; por ello, el cuadernillo que ahora posees, es producto de un esfuerzo y trabajo conjuntos entre los docentes y los responsables de las áreas académicas de nuestras oficinas centrales.

Si bien es cierto la pandemia continúa, ello no representa un impedimento para no cumplir con nuestra labor educativa, razón esencial de nuestra gran institución. Por ello, hoy más que nunca, la labor académica es vital para alcanzar nuestro principal objetivo: tu formación escolar que contribuya a consolidar tu proyecto de vida.

El contenido de este *Material didáctico del estudiante*, te permitirá continuar con tu proceso de enseñanza-aprendizaje desde casa. Por supuesto, estarás respaldado por la asesoría y seguimiento de cada uno de tus docentes y autoridades educativas.

Cada una de las personas que laboramos en el Colegio de Bachilleres del Estado de Quintana Roo ponemos lo mejor de nosotros para seguir caminando juntos, aun en la pandemia, generando resiliencia y fortaleciendo las competencias académicas y socioemocionales que nos permitan salir adelante.

Te invito a no bajar la guardia en lo académico y en el cuidado de tu salud. Trabaja intensamente, con compromiso y con responsabilidad; sé responsable y perseverante, ello te llevará al éxito y a cumplir tus metas. Te deseo lo mejor para este semestre que inicia.

**Dr. Rafael Ignacio Romero Mayo**  
Director General



# ÍNDICE

|                                                     |            |
|-----------------------------------------------------|------------|
| <b>Introducción.....</b>                            | <b>1</b>   |
| <b>¿Con qué conocimientos previos cuento? .....</b> | <b>3</b>   |
| <b>Bloque I      Relaciones y funciones</b>         |            |
| Actividad 1.....                                    | 5          |
| Actividad 2.....                                    | 11         |
| Actividad 3.....                                    | 23         |
| <b>Bloque II      Funciones polinomiales</b>        |            |
| Actividad 1.....                                    | 41         |
| Actividad 2.....                                    | 45         |
| Actividad 3.....                                    | 48         |
| Actividad 4.....                                    | 52         |
| Actividad 5.....                                    | 61         |
| <b>Bloque III      Funciones racionales</b>         |            |
| Actividad 1.....                                    | 67         |
| Actividad 2.....                                    | 85         |
| <b>Bloque IV      Funciones trascendentes</b>       |            |
| Actividad 1 .....                                   | 89         |
| Actividad 2.....                                    | 96         |
| Actividad 3.....                                    | 100        |
| <b>Instrumentos para evaluación.....</b>            | <b>105</b> |
| <b>Material sugerido para consulta.....</b>         | <b>119</b> |
| <b>Bibliografía.....</b>                            | <b>120</b> |



# INTRODUCCIÓN

Nuestro compromiso es continuar generando estrategias que te permitan fortalecer los aprendizajes de las diversas asignaturas, por esta razón ponemos a tu disposición este documento, el cual se construyó con la participación de maestras y maestros del área de matemáticas de todo el estado, quienes con mucha dedicación y esfuerzo diseñaron actividades tomando en consideración los aprendizajes esperados y las competencias de los programas de estudio y que estamos seguros te permitirán continuar con tu formación académica.

Es importante mencionar que, este cuadernillo contiene una serie de actividades que te permitirán alcanzar los aprendizajes esperados de la asignatura de Matemáticas 4, nos sumergiremos a uno de los conceptos maravillosos de las matemáticas, la función, en este recorrido aprenderemos acerca del concepto principal, daremos un vistazo a las llamadas funciones polinomiales, también las racionales y las trascendentes. De la misma manera, analizaremos sus características, las representaremos gráficamente y entenderemos su relación con la vida cotidiana.

Considera dos herramientas básicas para esta asignatura como lo son: tener a la mano un juego de geometría o cualquier objeto que te permita realizar trazos en tu libreta, así como recuperar la calculadora científica del semestre anterior para realizar algunos cálculos matemáticos implicados en las actividades.

Recuerda que las matemáticas son importantes en tu formación, pues promueven el razonamiento, al mismo tiempo desarrolla tu capacidad de análisis, tu pensamiento crítico, tomar decisiones informadas e imaginar soluciones posibles a problemas. Algunas actividades te pueden parecer fáciles, otras quizá más difíciles, pero no te desanimes, con un poco de esfuerzo y perseverancia estamos seguros que podrás concluir las satisfactoriamente.

Cada actividad contiene una lectura previa que te permitirá reflexionar sobre los contenidos principales, posteriormente encontrarás las instrucciones precisas para desarrollarla y la descripción del instrumento con la que será evaluada. Se hace énfasis en que practiques el proceso de autoevaluación, de tal manera que puedas reflexionar sobre las dificultades a las que te enfrentaste y los aprendizajes que lograste al final de cada bloque, no olvides tomar nota en tu libreta de todo aquello que observaste en tu proceso de aprendizaje para que posteriormente puedas comentar con tu maestra o maestro.

Te recomendamos dedicar un horario determinado de estudio ya que las realizarás a través de la autogestión, encuentra un espacio en casa que te permita estar cómodo y con el menor número de distracciones, así como revisa las instrucciones de cada actividad para completarla con éxito.



Es necesario que te mantengas comunicado con tu maestro o maestra para establecer las fechas y los mecanismos de entrega, así como los criterios de evaluación, no te sientas solo, estamos para apoyarte y acompañarte en este camino.

Las matemáticas tienen un lado divertido y agradable, atrévete a descubrirlas.

**¡Éxito!**



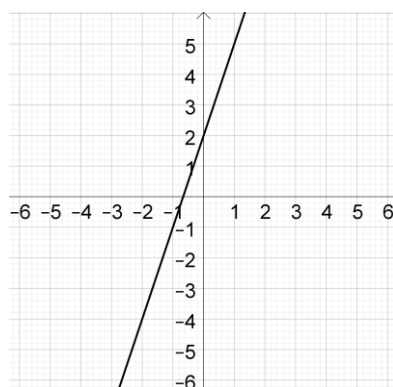
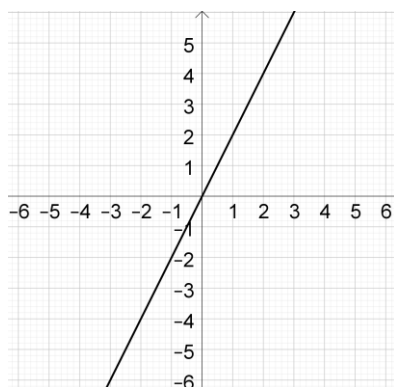
## ¿CON QUÉ CONOCIMIENTOS PREVIOS CUENTO?



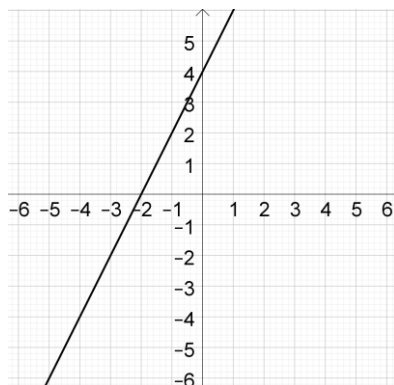
### Instrucciones

El propósito de esta sección es reflexionar acerca de los conocimientos previos con los que cuentas. Resuelve los siguientes ejercicios escribiendo el procedimiento completo en tu cuaderno.

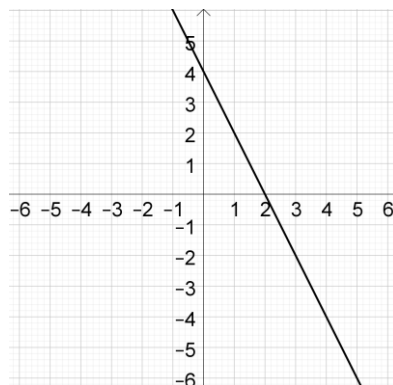
1. El trinomio cuadrado perfecto  $x^2 - 10x + 25$  se descompone en:  
a)  $(x - 5)(x + 5)$       b)  $(x - 5)^2$       c)  $(x - 12.5)(x + 12.5)$       d)  $(x + 5)^2$
2. ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación cuadrática  $x^2 - 7x - 18 = 0$ ?  
a)  $x = 9$   
 $x = -2$       b)  $x = -9$   
 $x = -2$       c)  $x = -10$   
 $x = -8$       d)  $x = -6$   
 $x = 3$
3. ¿Cuál es la gráfica que representa la recta que tiene por ecuación  $y = 2x + 4$ ?  
a)      b)



c)



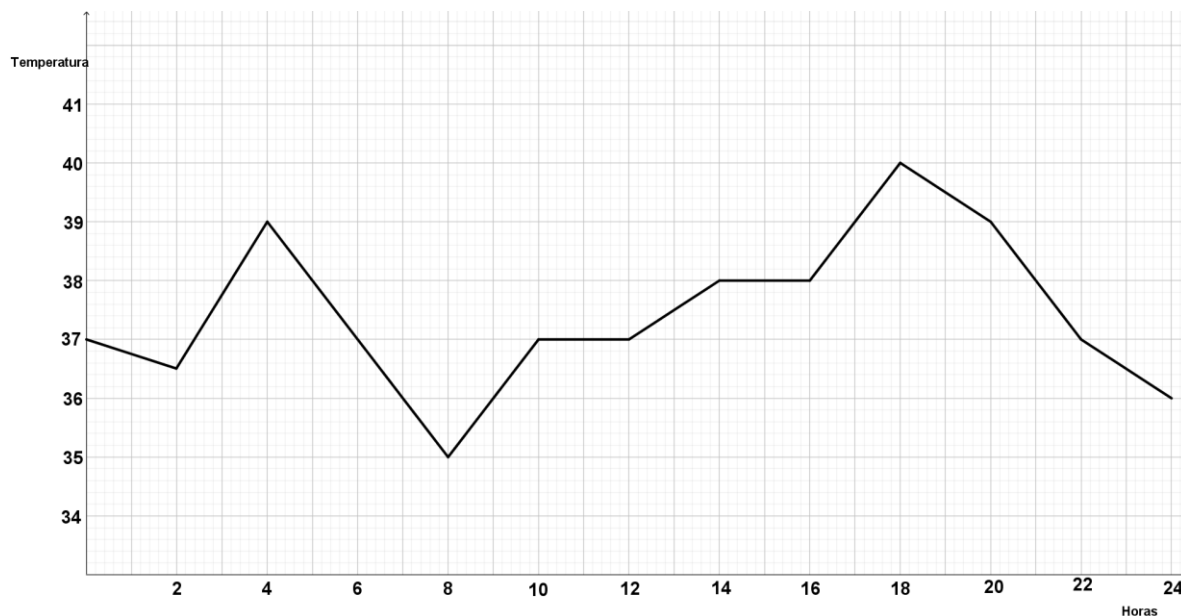
d)



4. ¿Cuál de las siguientes expresiones representa a una función trigonométrica?  
a)  $y = \cos x$       b)  $y = 3x + 2$       c)  $y = 2^x$       d)  $y = x$



5. Ordena de forma ascendente por el grado con respecto a la variable  $x$ :  $25xy^2, 4x^2y^4, -8x^4y, 12x^5y^3, x^3y^7$
6. La gráfica muestra la variación de la temperatura de un enfermo del hospital del IMSS a lo largo de las horas que ha estado hospitalizado. Analiza la gráfica y responde a las siguientes preguntas:



Preguntas:

- ¿Cuántas horas estuvo en observación?
- ¿Cuántas horas ha mantenido una temperatura constante?
- ¿Cuál fue la máxima temperatura que alcanzó?
- El médico dejó indicaciones para suministrar un medicamento para bajarle la fiebre en el momento en el que ha alcanzado  $39^\circ$  ¿a partir de qué hora recibió la medicación?
- ¿Cuál es la temperatura mínima que alcanza y a qué hora se produce?



## BLOQUE I. Relaciones y funciones

### Actividad 1

- **Aprendizaje Esperado:** Emplea las inecuaciones para hacer comparaciones que le permitan resolver de forma reflexiva, problemas presentes en su entorno.
- **Atributo (s):**
  - 1.1 Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades / 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas / 5.2 Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones.
- **Conocimiento (s):**
  - Inecuaciones / Intervalos / Clasificación de los intervalos

### Lectura previa

Lee con mucha atención el siguiente texto:

Seguramente en alguna ocasión de tu vida escolar te has ganado una beca institucional o recibido alguna cantidad de dinero extra por algún trabajo o mandado. Pero, ¿qué sucede cuando nosotros recibimos algún dinero extra? Tal vez lo primero que pensamos es, ¿en qué lo gastaríamos?, o mejor aún; si nos alcanzaría para comprar un teléfono nuevo, unos zapatos nuevos, una bicicleta etc. A partir de que hacemos planes de comprar cualquier artículo, estamos comparando nuestro dinero con el valor de los objetos y si tenemos más dinero que el costo de algún artículo, simplemente lo compramos. De esta forma comparamos constantemente las dimensiones de un objeto con respecto a otro, si es más costoso o menos costoso, si es más grande o más pequeño, más pesado o más ligero etc.



### Desigualdad o inecuación

El enunciado que señala que una expresión es mayor que, mayor o igual que, menor que, menor o igual, que otra expresión, es una desigualdad. Estos se resumen en la siguiente tabla:

| Símbolo | Significado       |
|---------|-------------------|
| $>$     | Mayor que         |
| $\geq$  | Mayor o igual que |
| $<$     | Menor que         |
| $\leq$  | Menor o igual que |

El uso de estos símbolos corresponde al concepto de **inecuación**, y se da cuando se compone de dos expresiones para conocer cuál de ellas es mayor o menor.



### Por ejemplo

Si planeas comprar una bicicleta con un valor de \$1800.00, pero sólo cuentas con la cantidad de



El costo de \$1800.00 es mayor a la cantidad de dinero que se tiene \$ 1200.00.

$$1800 > 1200$$

Otros ejemplos de inecuaciones son los siguientes:

a)  $x > 2$

b)  $12x < 24$

c)  $2x + 3 \leq x + 8$

d)  $4x - 2 \geq 7 + x$

En *matemáticas uno* se resolvieron situaciones con igualdades o ecuaciones. Por ejemplo  $3x - 2 = 7$ , en las cuales se determinó el valor de la variable. Para ello, se empleó varias técnicas, desde visualizar los posibles valores y verificarlos, pasando por los clásicos despejes, factorizaciones, fórmulas y otros. Estos se pueden resolver exactamente como las ecuaciones lineales, pero con una excepción. *Si multiplicamos o dividimos ambos lados por un número negativo, debemos cambiar la dirección de la desigualdad.*

### Por ejemplo:

Resolver la desigualdad lineal  $-4(3x + 2) \leq 16$

$$-4(3x + 2) \leq 16$$

$$-12x - 8 \leq 16$$

$$-12x \leq 24$$

$$x \geq -2$$

Usar la propiedad distributiva para eliminar el paréntesis

Sumar 8 en ambos lados

Dividir entre -12 ambos lados e invertir el símbolo  $\leq$

**Ejemplo 1**

Encuentre el conjunto solución de: **a)  $x > 2$**

**Respuesta:**

Los números que cumplen con la condición de ser mayores a 2 se pueden representar en la siguiente recta.



En la recta se puede apreciar que el número *dos* no entra en el intervalo de solución.

Otra forma para presentar la solución es por intervalos:  $(2, \infty)$

**Ejemplo 2**

Encuentre el conjunto solución de: **b)  $12x < 24$**

**Respuesta:**

$$12x < 24$$

$$x < \frac{24}{12}$$

$$x < 2$$

La solución se presenta de igual forma en la siguiente gráfica:



Otra forma para presentar la solución es por intervalos:  $(-\infty, 2)$

**Ejemplo 3**

Encuentre el conjunto solución de: **c)  $2x + 3 \leq x + 8$**

**Respuesta:**

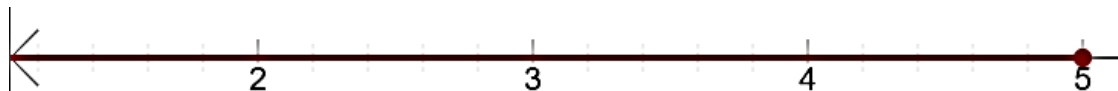
Mover todos los términos que contengan  $x$  al lado izquierdo de la inecuación con signo contrario

$$2x - x + 3 \leq 8$$

Mover los términos que no contengan  $x$  al lado derecho de la inecuación.

$$2x - x \leq 8 - 3, \quad \text{se resuelven las operaciones indicadas,} \quad x \leq 5$$

La respuesta igual se presenta gráficamente como sigue:



Otra forma para presentar la solución es por intervalos:  $(-\infty, 5]$



### Ejemplo 4

Encuentre el conjunto solución de:  $d) 4x - 2 \geq 7 + x$

**Respuesta:**

Mover todos los términos que contengan  $x$  al lado izquierdo de la inecuación con signo contrario

$$4x - x - 2 \geq 7$$

Mover los términos que no contengan  $x$  al lado derecho de la inecuación con signo contrario

$$4x - x \geq 7 + 2$$

Se resuelven las operaciones indicadas

$$3x \geq 9, \text{ se deja sólo a la variable } x \text{ y el } 3 \text{ pasa dividiendo: } x \geq \frac{9}{3}, \therefore x \geq 3$$

La respuesta igual se presenta gráficamente como sigue:



Otra forma para presentar la solución es por intervalos:  $[3, \infty)$

### Intervalo

En términos de Ríos (2018) “*Un intervalo representa al conjunto de números comprendidos entre 2 números reales, dichos valores reciben el nombre de cotas o extremos*” (p.21). En la siguiente tabla se muestra las posibilidades cuando  $a$  y  $b$  son números reales.

| Tipo de intervalo | Desigualdad       | Gráfica | Intervalo     |
|-------------------|-------------------|---------|---------------|
| Abierto           | $n < x < m$       |         | $(n, m)$      |
| Abierto           | $x > n$           |         | $(n, \infty)$ |
| Abierto           | $x < n$           |         | $(\infty, n)$ |
| Cerrado           | $n \leq x \leq m$ |         | $[n, m]$      |
| Semiabierto       | $n < x \leq m$    |         | $(n, m]$      |
| Semicerrado       | $n \leq x < m$    |         | $[n, m)$      |



## Actividad 1.1

### Instrucciones

1. Resuelve correctamente los siguientes ejercicios de desigualdades en tu libreta de apuntes. Realiza la representación gráfica y en forma de intervalos.
2. Seguidamente observa tus respuestas y selecciona la correcta en esta sección. Anota en la línea punteada después de los incisos la forma de intervalo en cada uno.

| 1 | $18x + 6 \leq 120 - 20x$                                            | 2 | $6 - 3x < 15$                                                       |
|---|---------------------------------------------------------------------|---|---------------------------------------------------------------------|
|   | <p>a. </p> <p>b. </p> <p>c. </p> <p>d. </p> <p>e. </p> <p>.....</p> |   | <p>a. </p> <p>b. </p> <p>c. </p> <p>d. </p> <p>e. </p> <p>.....</p> |

| 3 | $6x - 1 > 29$                                                       | 4 | $4(x - 7) \leq 6x - 20$                                             |
|---|---------------------------------------------------------------------|---|---------------------------------------------------------------------|
|   | <p>a. </p> <p>b. </p> <p>c. </p> <p>d. </p> <p>e. </p> <p>.....</p> |   | <p>a. </p> <p>b. </p> <p>c. </p> <p>d. </p> <p>e. </p> <p>.....</p> |

| 5 | $-4 - 3x \leq 2$                                       | 6 | $2x - 3 \leq 4x + 7$                                   |
|---|--------------------------------------------------------|---|--------------------------------------------------------|
|   | <p>a. </p> <p>b. </p> <p>c. </p> <p>d. </p> <p>e. </p> |   | <p>a. </p> <p>b. </p> <p>c. </p> <p>d. </p> <p>e. </p> |

## Evaluación

- Esta actividad se evaluará con una lista de cotejo de solución de ejercicios (Instrumento de evaluación 1)

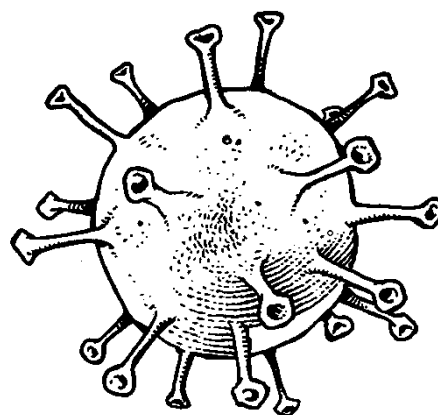
### Actividad 1.2

#### Instrucciones

1. Lee correctamente el siguiente problema y realiza el planteamiento en forma de inecuación.
2. Resolver correctamente el ejercicio planteado y concluir.

#### “Venta de cubrebocas, un respiro económico para algunos”

Ante el brote de **coronavirus** y la contingencia sanitaria, algunos aprovecharon la oportunidad para fabricar y vender cubrebocas, con el fin de obtener algún ingreso, pues cientos de personas quedaron desempleadas temporalmente y otros fueron despedidos. Tal es el caso de José Buendía, que decidió invertir sus ahorros en la fabricación y venta de cubrebocas, para poder llevar así algún sustento a su familia. Sin embargo, al analizar sus costos de fabricación, llegó a la conclusión, que para recuperar su capital y tener una buena ganancia, debe vender al menos 240 cubrebocas al mes. Si en las primeras tres semanas vendió 170, ¿cuántos cubrebocas, debe vender en la última semana del mes?



## Evaluación

- Esta actividad se evaluará con una lista de cotejo de solución de problemas (Instrumento de evaluación 2)

## Actividad 2

- **Aprendizaje Esperado:** Emplea las relaciones y las funciones, que le permitan resolver de forma reflexiva problemas presentes en su entorno
- **Atributo (s):**
  - 1.1 Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades / 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas / 5.2 Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones.
- **Conocimiento (s):**
  - Relación / Función / Formas de presentar una función / prueba de la recta vertical

### Lectura previa

Lee con mucha atención el siguiente texto:

#### “Lo que debes saber antes de comprar un celular nuevo”

La primera pregunta que todo el mundo debe plantearse antes de comprar un Smartphone es, ¿qué uso se va a dar de él? Si sólo se necesita para llamadas y mails, probablemente no haga falta adquirir el último modelo de las marcas más caras del mercado. Por el contrario, el teléfono móvil se ha convertido en una herramienta de trabajo y ocio imprescindible para algunos usuarios. En estos casos, si por necesidad o por hábito se utilizan frecuentemente funciones como la navegación GPS, aplicaciones de ofimática o herramienta multimedia, un smartphone de una gama superior será más adecuado.



Una vez hayas definido un precio tope, estos son los elementos que deberías tener en cuenta:



#### Características

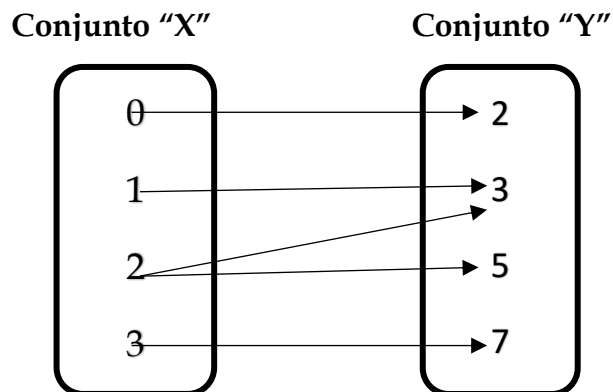
- Tamaño
- Sistema operativo
- Duración de la batería
- Almacenamiento
- Función foto y video

Como puedes observar todos los Smartphone tienen una cierta *relación* con algunas características que cubra tus necesidades. Pero a su vez cada una de las características cumplen una *función* en particular.

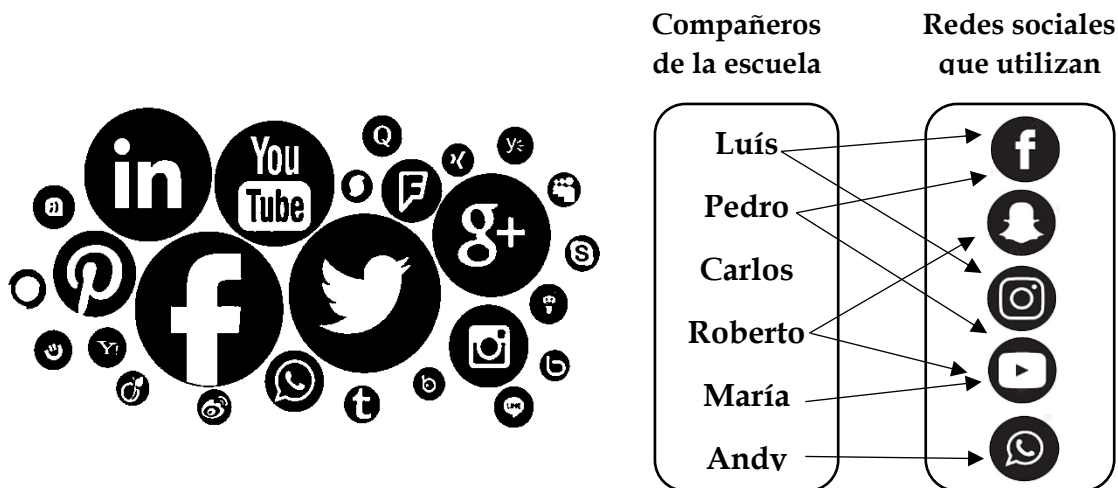
**Relación.**

Se presenta cuando a cada elemento del primer conjunto le corresponde uno o más elementos en el siguiente conjunto. En este sentido si asignamos al primer conjunto “x” y al segundo conjunto “y” podemos notar que al relacionarse se forma un conjunto de pares ordenados  $(x, y)$ .

Como se muestra en la siguiente imagen:

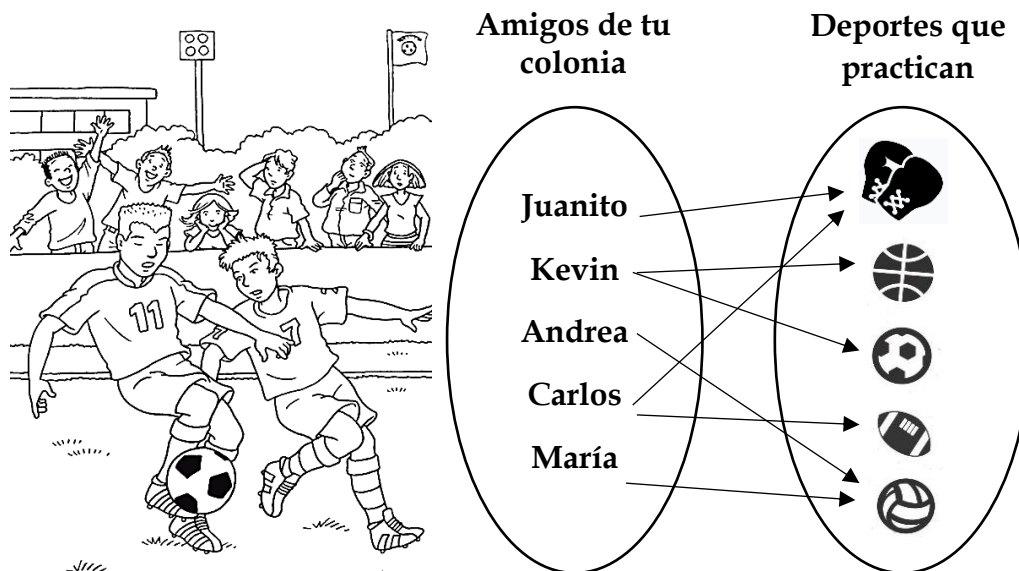


En nuestra vida cotidiana existen infinidad de situaciones que se pueden presentar como una *relación*. A continuación, se mencionarán algunos.

**Ejemplo 1**



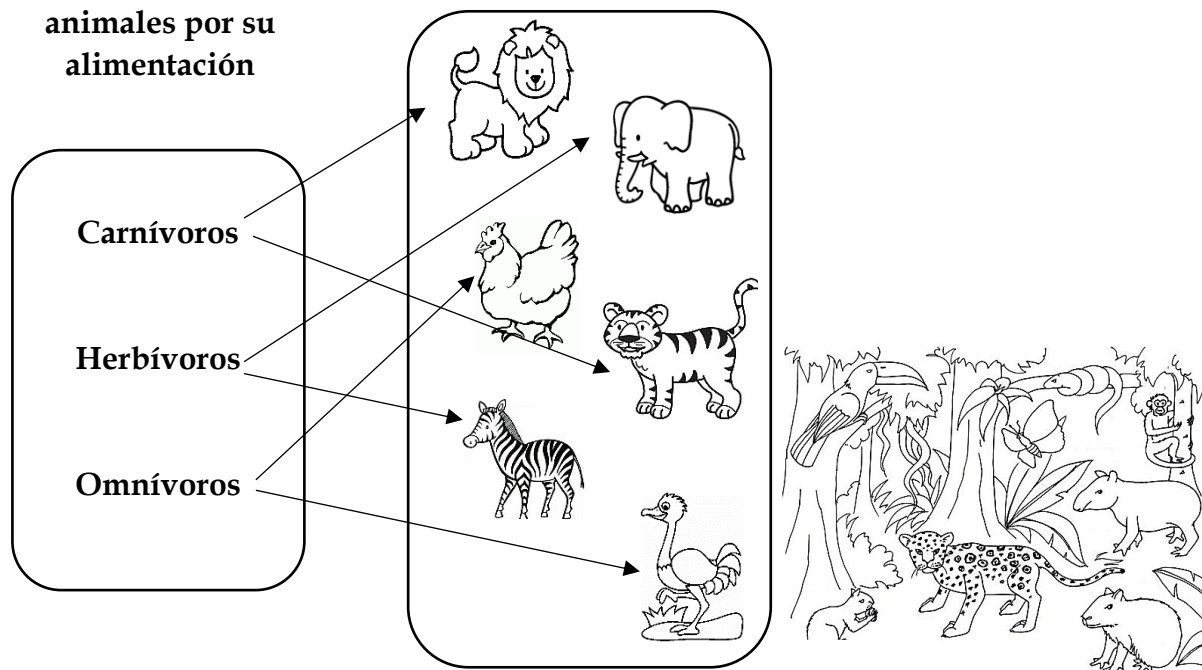
## Ejemplo 2



## Ejemplo 3

**Clasificación de los  
animales por su  
alimentación**

**Animales**



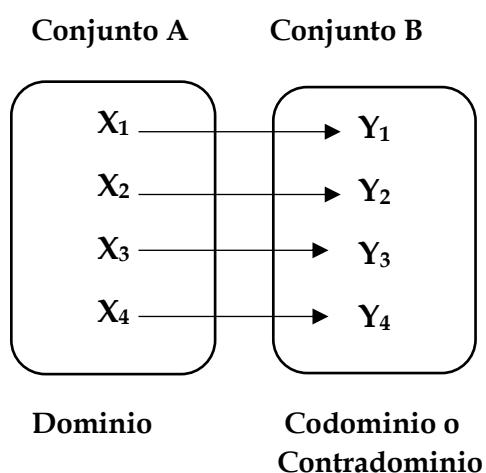


### Función

Una función se presenta cuando a cada elemento del conjunto "x", se relaciona directamente con un solo elemento en el conjunto "y".

También se representa como dos conjuntos de números. Uno, en el que toma valores la variable independiente  $x$ , y otro, en el que toma valores la variable dependiente "y". Entre estos conjuntos se da una relación dada por  $f(x) = y$

Se puede representar como sigue:



### Dominio.

Son todos los valores que le corresponden al conjunto "x".

### Codominio o contradominio

Son todos los valores que le corresponden al conjunto "y", que están relacionados de alguna forma con los valores del conjunto "x".

Al igual que el concepto de relación, en nuestra vida cotidiana constantemente interactuamos con situaciones que se pueden representar como una función. A continuación, se mencionan algunos ejemplos de funciones:

### Ejemplo 1



Estados de la  
República

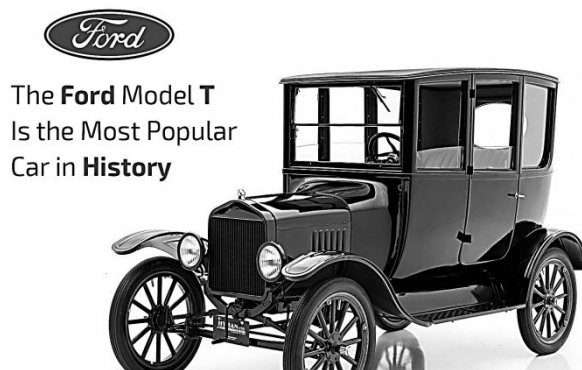
Ciudad  
capital

Yucatán  
Q. Roo  
Campeche  
Chiapas

Campeche  
Tuxtla G.  
Mérida  
Chetumal

El *dominio* corresponde a los estados: Yucatán, Q. Roo, Campeche, Chiapas. Mientras que el *codominio* son las ciudades: Campeche, Tuxtla Gutiérrez, Mérida y Chetumal.

### Ejemplo 2



Agencias de  
vehículos

Vehículos



Volkswagen  
CHEVROLET



VERSAS

EcoSPORT

Vento

El *dominio*, son todas las agencias: Nissan, Ford, Volkswagen, Chevrolet. Mientras que el *codominio*, está formado por los nombres de los vehículos: Chevy, Versa, Ecosport y Vento.

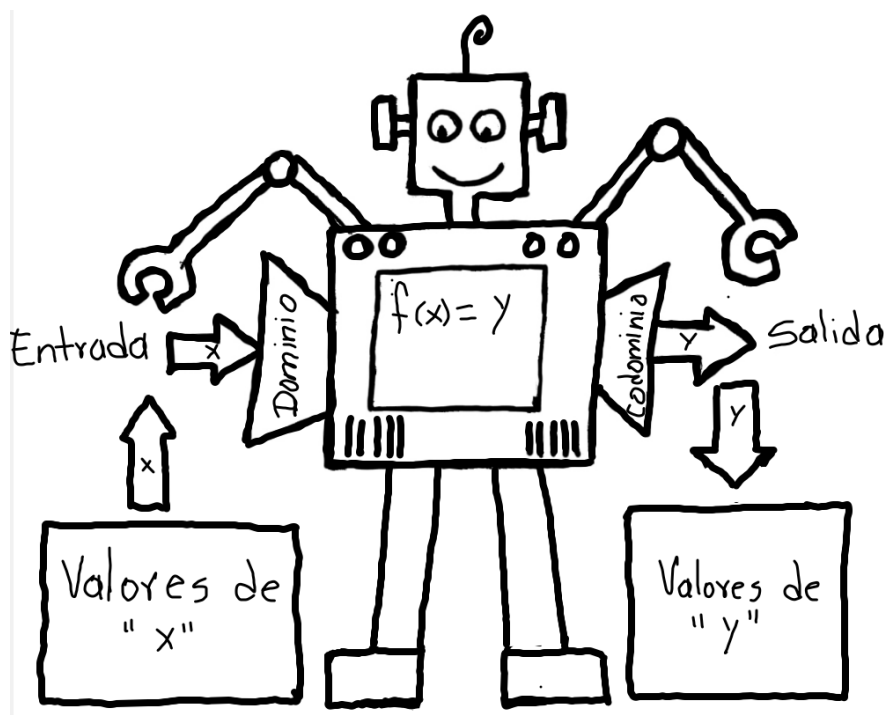


Retomando los 2 ejemplos anteriores se puede identificar una relación entre los dos conjuntos, sin embargo, también se considera que es una función debido a que sólo le corresponde un elemento en el segundo conjunto.

### Regla de correspondencia

En una función se establece una regla de correspondencia  $f(x) = y$ , esta regla garantiza que se cumpla que a cada elemento del dominio le corresponda un solo elemento en el codominio.

Lo anterior se puede presentar con la siguiente máquina de funciones:



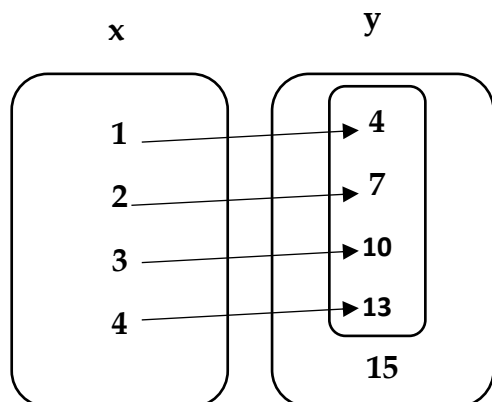
Si observamos detenidamente la máquina de funciones, los valores de “x” tienen una entrada, misma que deberá pasar por un proceso de construcción, que para nuestro caso es la regla de correspondencia en la forma  $f(x) = y$  para obtener un resultado final de “y”.



## Rango de una función

“En una función no es necesario que todos los elementos del contradominio queden relacionados con elementos del dominio. El subconjunto del contradominio que sí queda relacionado con elementos del dominio se le llama *imagen o rango*” (Contreras L. Martínez M, 2018)<sup>1</sup>

Por ejemplo:



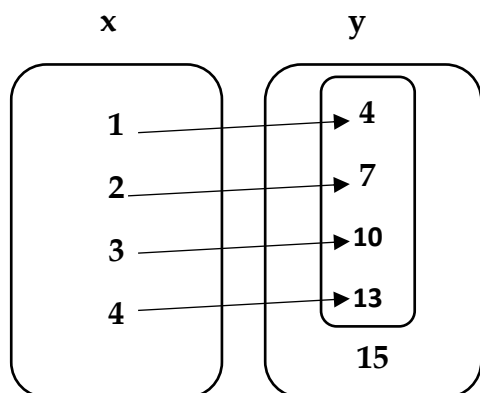
**Dominio** = {1, 2, 3, 4 }

**Codominio** = {4, 7, 10, 13, 15}

**Rango** = {4, 7, 10, 13}

## Formas de presentar una función

### 1. Diagrama sagital



### 2. En forma de tabla

| x | y  |
|---|----|
| 1 | 4  |
| 2 | 7  |
| 3 | 10 |
| 4 | 13 |

### 3. Parejas ordenadas

{(1,4), (2,7), (3,10), (4,13)}

<sup>1</sup> (Contreras L. Martínez M, 2018)



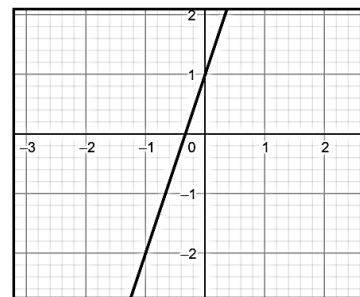
## 4. Ecuación

$$y = 3x + 1$$

## 5. Enunciado

El triple de un  
número aumentado  
en uno

## 6. Gráfica

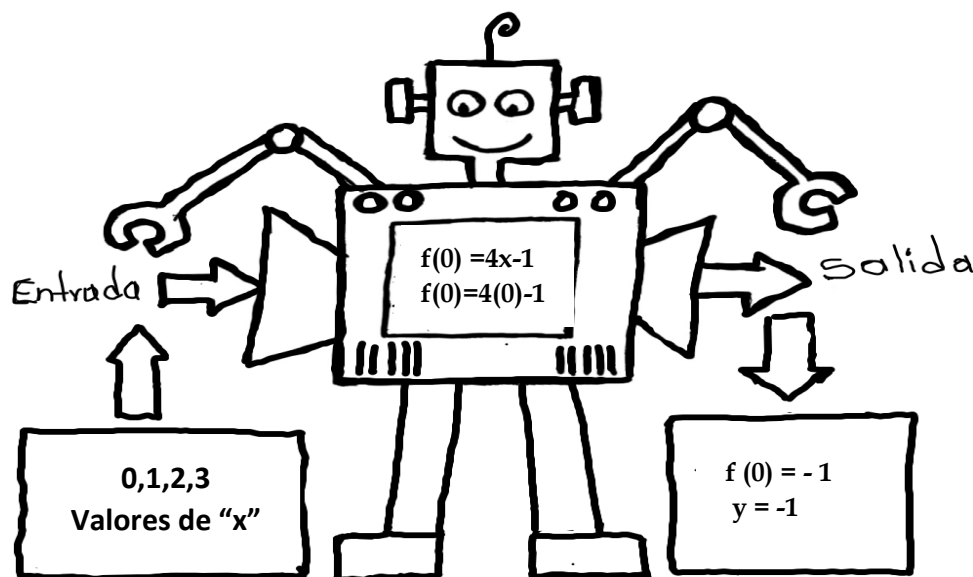


La representación gráfica de una función permite analizar desde otro enfoque su comportamiento. Si se dispone de la gráfica de la función, es fácil conocer, analizar y comparar la relación que hay entre las variables estudiadas, así como analizar su naturaleza e identificar puntos y regiones de interés. (Rios, 2018, p. 33) <sup>2</sup>

**Por ejemplo:**

Asignar valores a la siguiente función  $y = 4x - 1$

- Realizar la tabla de valores y los pares ordenados
  - Representar la tabla en forma sagital y representar el dominio, codominio y rango
  - Realizar la gráfica
- a) Retomando nuestra máquina de funciones, asignamos valores a "x" en el intervalo [0,3]



<sup>2</sup> (Rios, Matemáticas IV, 2018)



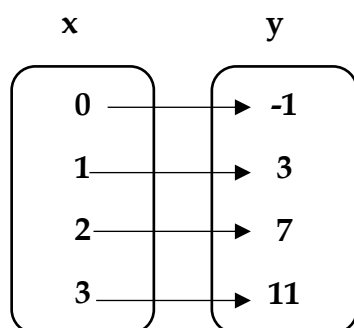
Si continuamos con los demás valores que se encuentran en la máquina de funciones, se obtiene la siguiente tabla de valores:

| $x$ | $f(x) = 4x - 1$        |
|-----|------------------------|
| 0   | $f(0) = 4(0) - 1 = -1$ |
| 1   | $f(1) = 4(1) - 1 = 3$  |
| 2   | $f(2) = 4(2) - 1 = 7$  |
| 3   | $f(3) = 4(3) - 1 = 11$ |

| $x$ | $Y$ |
|-----|-----|
| 0   | -1  |
| 1   | 3   |
| 2   | 7   |
| 3   | 11  |

**Pares ordenados:**  
 $\{(0, -1), (1, 3), (2, 7), (3, 11)\}$

b) Forma sagital



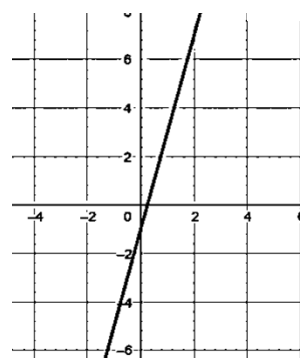
**Dominio:**  $\{0, 1, 2, 3\}$

**Codominio:**

$\{-1, 3, 7, 11\}$

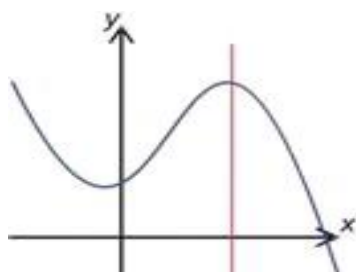
**Rango :**  $\{-1, 3, 7, 11\}$

c) Realizar la gráfica

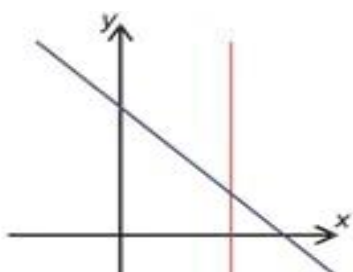


### Prueba de la recta vertical

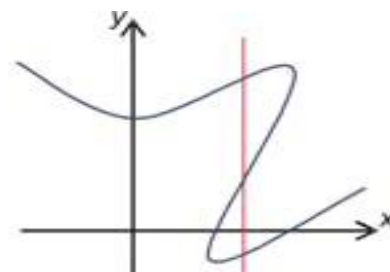
La prueba de la recta vertical es un criterio no formal que permite identificar si un gráfico cumple con la condición de ser una función o no. La prueba consiste en deslizar una regla de manera vertical apoyándose sobre el eje  $X$  por todo el trazo del gráfico. Si la recta toca en un solo punto al gráfico entonces este cumple la condición de una función, pero en caso de que haya al menos un punto donde la recta toque a dos o más puntos entonces el gráfico no será una función. (Rios, 2018)<sup>3</sup>



A) Si es una Función



B) Si es una Función



C) No es una Función

<sup>3</sup> (Rios, Matemáticas IV, 2018)



## Actividad 2.1

### Instrucciones

1. Analiza correctamente los siguientes pares ordenados y responde en caso de ser una función o relación sobre la línea. Justifica tu respuesta.

(3, 4), (5,8), (7,2), (9,4), (1,0), (0,-3)

(2, 8), (5,6), (6,2), (7,4), (9,0), (6,-3)

(5,2), (1,5), (2,-2), (3,3), (6,9), (4,-4)

(-3,6), (2,5), (7,-2), (8,3), (9,9), (4,-4)

(2,2), (3,1), (5, 9), (2,1), (5, 3), (7,6)

(5,2), (3,1), (8, 9), (2,6), (5, 3), (6,6)

2. Relaciona cada conjunto con el de la izquierda e identifica cuál de los siguientes diagramas sagitales corresponde a una función o relación. Justifica tu respuesta

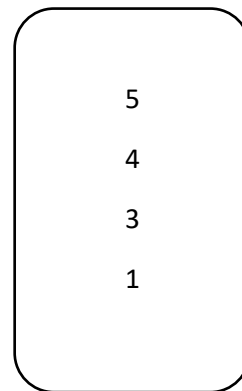
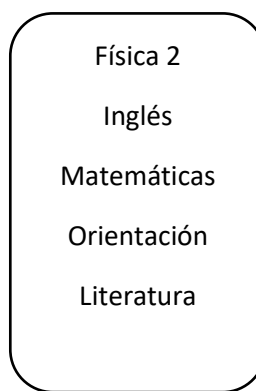
A) **Estados de la República**

**Ciudades**



B) **Asignaturas del 4º sem.**

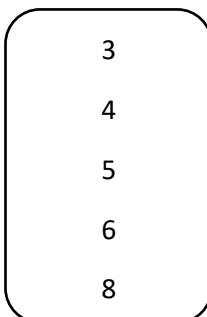
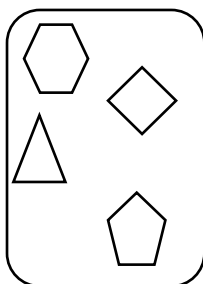
**Horas a la semana**



C)

**Polígonos regulares**

**Número de lados**



**¿Es una función o una relación?**

- A) \_\_\_\_\_  
B) \_\_\_\_\_  
C) \_\_\_\_\_

### Evaluación

- Esta actividad se evaluará con lista de cotejo (Instrumento 3)

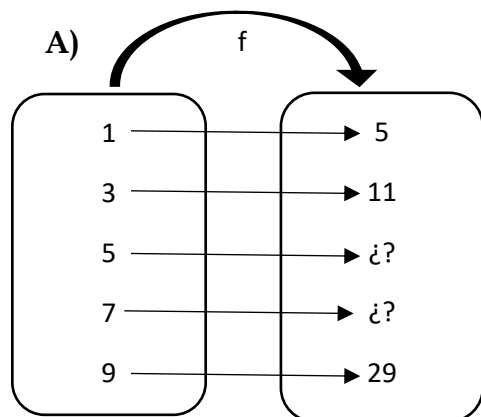




## Actividad 2.2

### Instrucciones

1. Observa cada uno de los siguientes diagramas y determina los elementos que se solicitan.



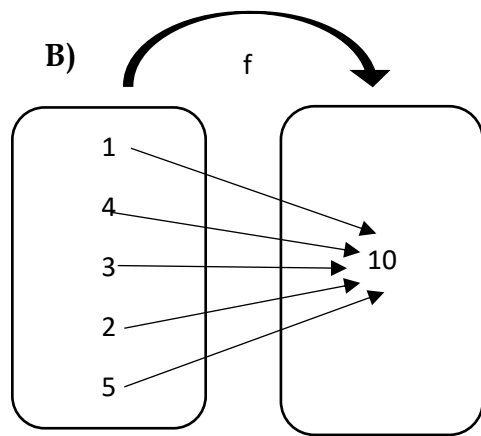
Dominio: \_\_\_\_\_

Codominio: \_\_\_\_\_

Ecuación: \_\_\_\_\_

Imagen: \_\_\_\_\_

$f(5) =$  \_\_\_\_\_  $f(7) =$  \_\_\_\_\_



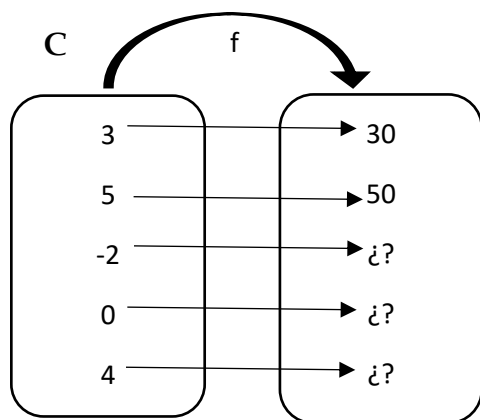
Dominio: \_\_\_\_\_

Codominio: \_\_\_\_\_

Ecuación: \_\_\_\_\_

Imagen: \_\_\_\_\_

$f(5) =$  \_\_\_\_\_  $f(3) =$  \_\_\_\_\_



Dominio: \_\_\_\_\_

Codominio: \_\_\_\_\_

Ecuación: \_\_\_\_\_

Imagen: \_\_\_\_\_

$f(-2) =$  \_\_\_\_\_  $f(0) =$  \_\_\_\_\_

### Evaluación

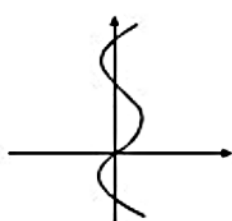
- Se evaluará con una lista de cotejo (Instrumento 4)



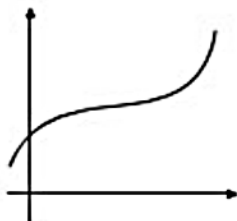
## Actividad 2.3

### Instrucciones

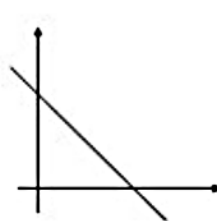
- Identifica cuál de las siguientes gráficas es una función utilizando la prueba de verticalidad



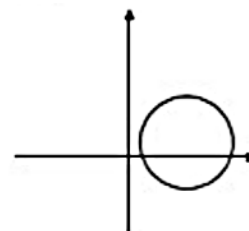
A) \_\_\_\_\_



B) \_\_\_\_\_



C) \_\_\_\_\_



D) \_\_\_\_\_

### Evaluación

- Esta actividad se evaluará con una lista de cotejo (Instrumento de evaluación 3)

## Actividad 3

- **Aprendizaje Esperado:** Emplea las relaciones y las funciones, que le permitan resolver de forma reflexiva problemas presentes en su entorno / Utiliza el pensamiento crítico y reflexivo para resolver la composición de funciones, así como la función inversa, llevándolas a situaciones aplicables en su entorno/ Aplica la función compuesta e inversa de manera algebraica o gráfica, promoviendo su creatividad para calcular problemas de su vida cotidiana.
- **Atributo (s):**
  - 1.1 Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades / 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas / 5.2 Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones
- **Conocimiento (s):**
  - Funciones especiales / Función escalonada / Función inversa/ Funciones crecientes y decrecientes / Transformaciones gráficas / Composición de funciones

### Lectura previa

Lee con mucha atención el siguiente texto:

En la actividad 1, se planteó el problema del señor José Arcadio Buendía, que decidió invertir sus ahorros en la fabricación y venta de cubre bocas. Esto para mitigar los efectos económicos por falta de empleos ante el brote de la actual pandemia del coronavirus.

Resulta que el señor, Buendía después de optimizar sus gastos y recursos observó que la ecuación que le permite calcular sus ganancias está dada por:  $y = 15x - 250$

¿A partir de cuántos cubre bocas deberá vender el señor Buendía, para obtener un margen de ganancia?

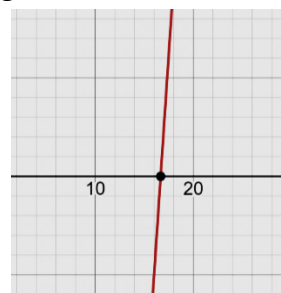


### Solución.

| x  | $y = 15x - 250$ |
|----|-----------------|
| 14 | -40             |
| 15 | -25             |
| 16 | -10             |
| 17 | 5               |
| 18 | 20              |

Para realizar esta actividad se procede a construir una tabla y se asignan valores de [14, 18]

Seguidamente procedemos a graficar los valores.





## Graficación de funciones

Con base al ejemplo anterior, para graficar una función de la manera más sencilla, basta sustituir valores de “x” en la función, y calcular los valores correspondientes para “y”, ubicar estos puntos en el sistema de coordenadas cartesianas y unir los puntos por una curva suave. Por lo tanto, la graficación de las funciones, es como un retrato de la función, nos ayuda a tener una idea de su comportamiento con los valores que le vamos asignando.

A partir de la gráfica de la función podemos encontrar el dominio, codominio y describir su comportamiento: dónde crece, dónde decrece, dónde se hace cero o dónde tiene un máximo o un mínimo etc.

## Clasificación de funciones

### Clasificación según su forma

- **Funciones algebraicas:**

a) Polinomiales

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

b) Racionales

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

c) Irracionales

$$f(x) = \sqrt{ax + b}$$

### Ejemplos

$$f(x) = 4x^3 + 2x^2 + 3x + 1$$

$$f(x) = \frac{2}{2x+4}$$

$$f(x) = \sqrt{4x + 2}$$

- **Funciones Trascendentes:**

a) Función exponencial

$$f(x) = e^x$$

$$f(x) = 8(2)^x$$

b) Función Logarítmica

$$f(x) = \log x$$

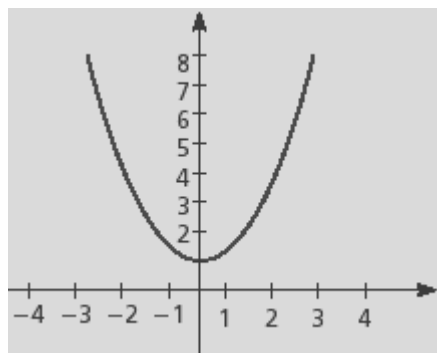
$$f(x) = \log_2 x$$

c) Trigonométrica

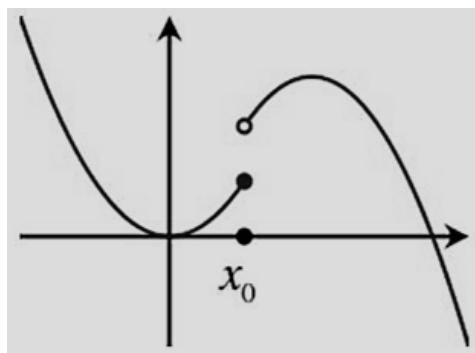
$$f(x) = \text{sen } x$$

$$y = 5 \text{ sen } x$$

### Clasificación de las funciones por sus gráficas



Función continua



Función discontinua

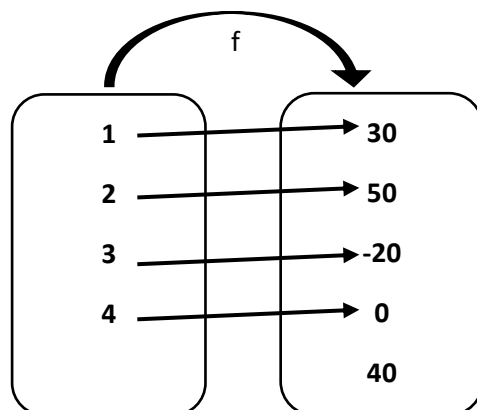


### Clasificación por la asociación entre dominio y rango

#### Función inyectiva

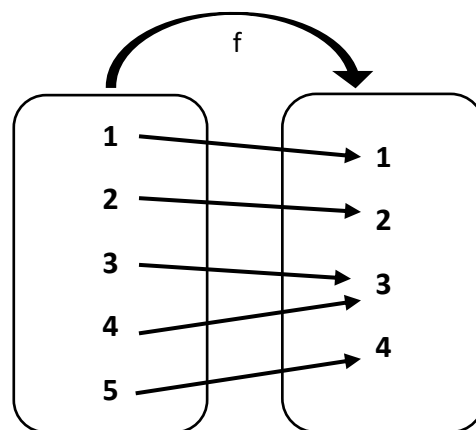
Son aquellas en las que para cada valor del contradominio existe solo un valor del dominio; es decir, cada valor de  $y$  tendrá solamente un valor de  $x$ . Pueden sobrar elementos " $y$ " en el contradominio.

Para determinar gráficamente si una función es de este tipo, se traza una línea horizontal y si esta la cruza en un solo punto se dice que es una función uno a uno.



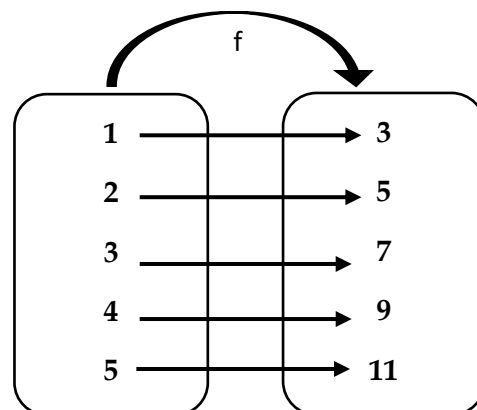
#### Función sobreyectiva

También se llaman suprayectivas. Es cuando todos los valores del dominio tienen su imagen en el contradominio, incluso más de una imagen y no queda un sólo valor " $y$ " que no esté relacionado por lo menos con uno de " $x$ ".



#### Función Biyectiva

Se dice que una función es biyectiva, cuando es inyectiva y sobreyectiva a la vez, es decir, un valor del dominio tiene solamente uno del contradominio y ningún valor del contradominio sobra.



## Funciones especiales

Están formados por los siguientes:

**Función constante, función identidad, función escalonada y la función valor absoluto**

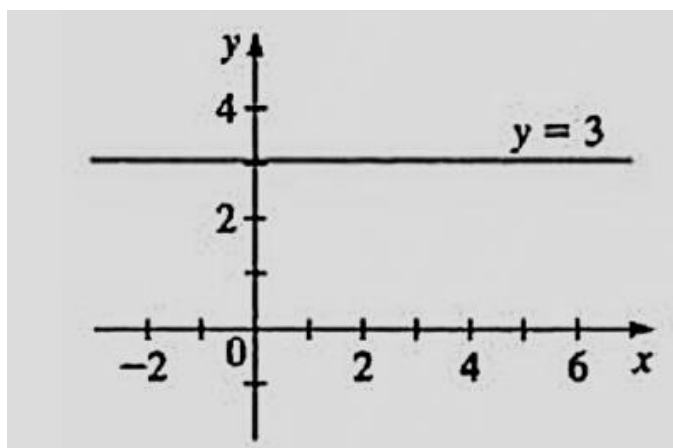
### *Función constante:*

Está dada por la forma  $y = a$ , y está presente en muchos aspectos de la vida cotidiana, por ejemplo, cuando vas caminando y observas la altura de los edificios con respecto al piso.

En el edificio le podemos asignar la altura de 30 m, que matemáticamente se puede escribir como  $y = 30$

“Esto nos ayuda a definir la función constante como aquella que relaciona todos sus elementos del dominio a un solo elemento del codominio, por lo que se le llama constante” (Gutierrez & Pérez, 2015)<sup>4</sup>

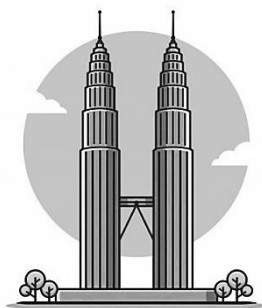
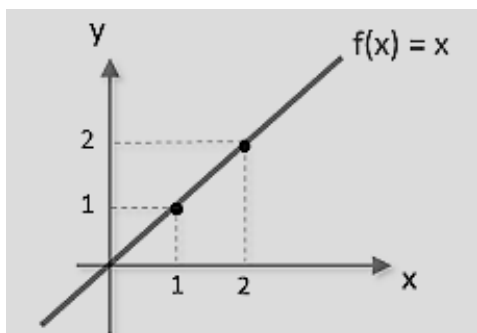
Su grafica está dado por:



<sup>4</sup> (Gutiérrez y Pérez, Matemáticas IV, 2015)

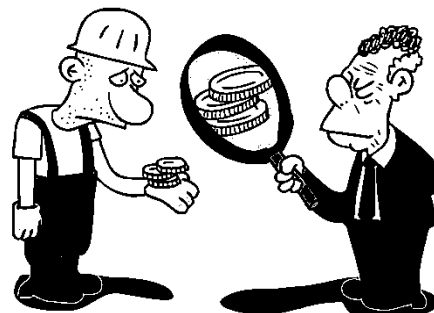
### Función identidad

Es el conjunto de parejas ordenadas  $(x, y)$  de tal manera que su primera y segunda componentes son iguales. Está definida por  $f(x) = x$ . Su gráfica es una línea recta que pasa por el origen con una inclinación de  $45^\circ$ , su dominio y codominio son todos los números reales.



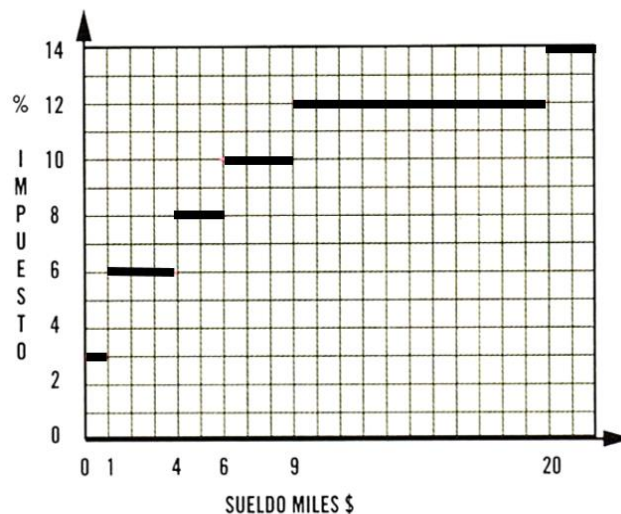
### Función escalonada

Las funciones escalonadas son aquellas cuyas gráficas se forman por segmentos de líneas rectas horizontales. Una función escalonada puede representar el porcentaje de impuestos que le descuentan a un trabajador al recibir su sueldo. La siguiente tabla muestra los impuestos dependiendo el salario que recibe el trabajador.<sup>5</sup>



(Gutierrez & Pérez, 2015 p. 41)

| Sueldo \$      | Impuesto |
|----------------|----------|
| 0-1000         | 3%       |
| 1001 - 4000    | 6 %      |
| 4001 - 6000    | 8%       |
| 6001 - 9000    | 10 %     |
| 9001 - 20,000  | 12 %     |
| Más de 20, 001 | 14 %     |

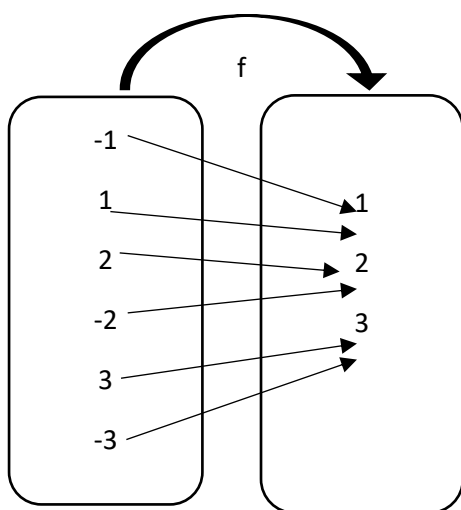


<sup>5</sup>(Gutiérrez y Pérez, Matemáticas IV, 2015)

## Función valor absoluto

La función valor absoluto relaciona el conjunto de los números reales con ellos mismos, pero con magnitud positiva. Su dominio son todos los números reales y su codominio son los números positivos. Su gráfica es similar al comportamiento de los rayos de la reflexión y refracción de la luz en una figura plana.

La función valor absoluto se presenta en el siguiente diagrama sagital:



Su gráfica está dada por :

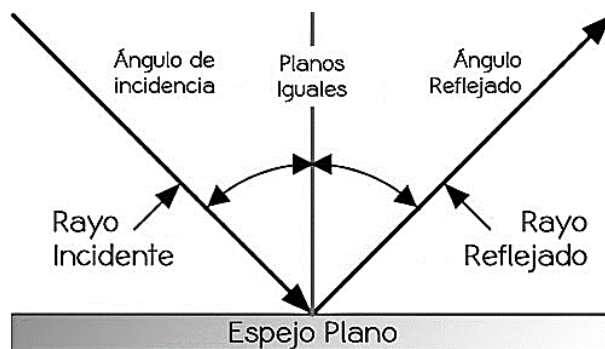
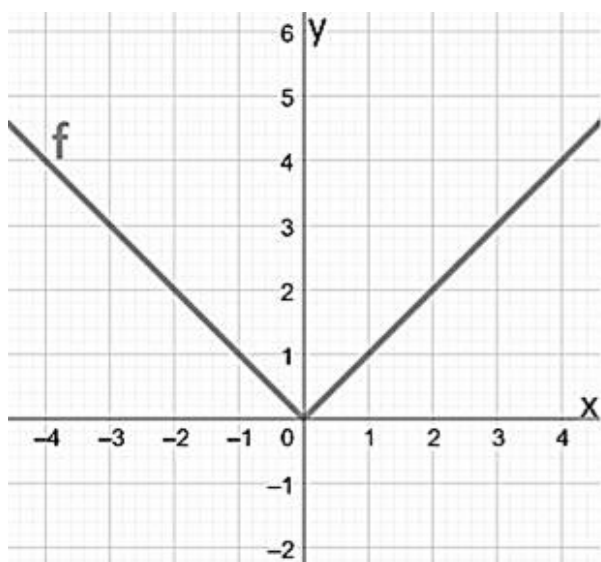


Imagen de la reflexión y refracción de la luz

Y se define de la siguiente manera:

Si  $x$  es un elemento de los números reales entonces a la expresión se le nombra valor absoluto de  $x$ . Y esta se define como:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$





### Actividad 3.1

#### Instrucciones

1. Identifica y escribe el nombre que le corresponde a cada expresión algebraica tomando en cuenta su clasificación según su forma.

a)  $f(x) = 2x^3 + 3x - 2$  \_\_\_\_\_

b)  $f(x) = \frac{1}{3} \operatorname{sen} 2x$  \_\_\_\_\_

c)  $f(x) = 6\log_3 x$  \_\_\_\_\_

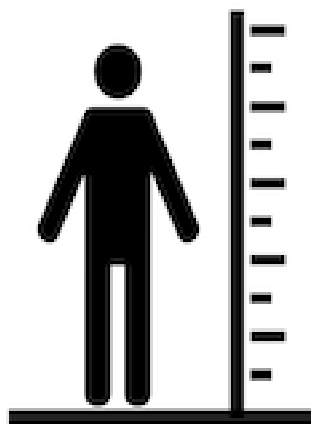
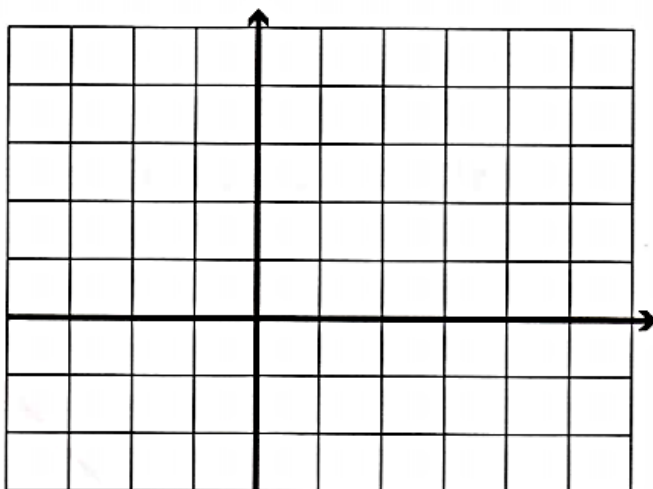
d)  $f(x) = 2x + 2$  \_\_\_\_\_

e)  $f(x) = 7(5)^x$  \_\_\_\_\_

f)  $f(x) = \frac{x - 3}{x^2 - 9}$  \_\_\_\_\_

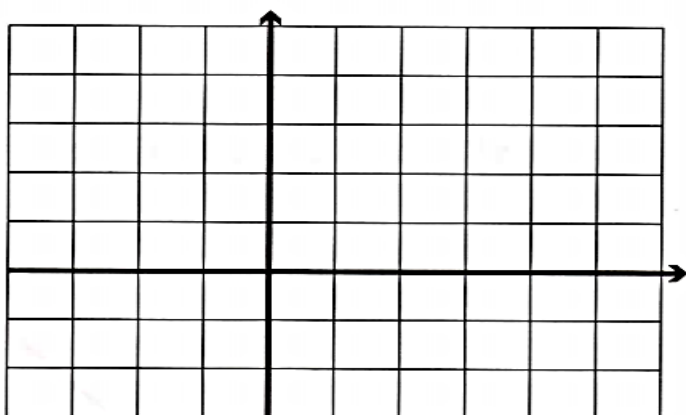
2. Resuelve correctamente cada uno de los siguientes ejercicios

- a) La estatura de Manuel, de 37 años, es constante y mide 1.63, grafica su estatura.

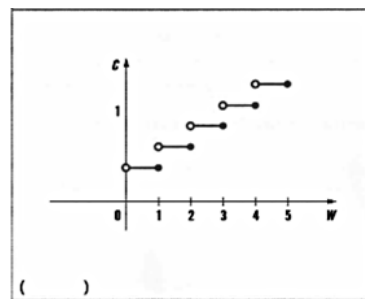
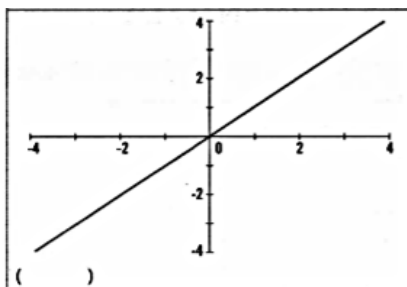
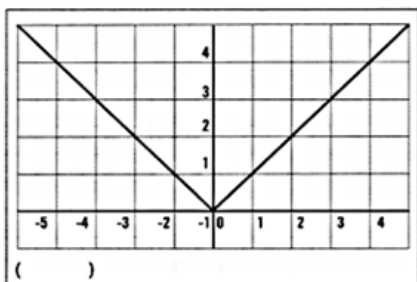


- b) La siguiente tabla muestra el porcentaje de impuesto de compraventa de un vehículo en la ciudad de Cancún Q. Roo, que depende del costo. Realiza la gráfica y menciona el impuesto que corresponde si se compra un vehículo de 125,000 pesos.

| COSTO EN PESOS      | IMPUESTO |
|---------------------|----------|
| 1 - 80 000          | 1%       |
| 80 001 - 120 000    | 2%       |
| 120 001 - 160 000   | 3%       |
| 160 001 - 220 000   | 4%       |
| 220 001 en adelante | 5%       |



- c) Observa cada una de las siguientes gráficas y menciona el nombre que le corresponde de acuerdo a su tipo de función.



## Evaluación

- Esta actividad se evalúa con una lista de cotejo (Instrumento de evaluación 5)



## Función inversa

“Un modo muy sencillo de entender la función inversa  $f^{-1}(x)$  es definirla como aquella que realiza una acción opuesta: por ejemplo, la función inversa de la suma es la resta; para la división, la multiplicación.”<sup>6</sup> (Hinojosa, 2014)

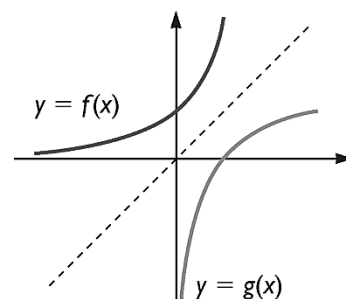
La función inversa de  $f : A \rightarrow B$  representada por  $f^{-1}(x)$ , es la expresión  $f^{-1}(x): B \rightarrow A$ , que hace que si  $y = f(x)$  entonces  $x = f^{-1}(y)$

Por ejemplo, si  $f(x) = \{(-8, 1), (-7, 2), (-6, 3), (-5, 4)\}$ , entonces las parejas ordenadas de la función inversa son:  $f^{-1}(x): \{(1, -8), (2, -7), (3, -6), (4, -5)\}$ .

Proceso para calcular la función inversa:

1. Se reescribe la función como  $f(x) = y$
2. Se cambian las variables :  $x$  por  $y$  y  $y$  por  $x$
3. Se despeja la variable  $y$  de la expresión resultante
4. Se sustituye  $y$  por  $f^{-1}(x)$

Su gráfica es de la siguiente forma



### Ejemplo 1

Encuentra la función inversa de  $f(x) = 3x - 8$

**Paso 1.** Se reescribe la función  $f(x) = 3x - 8$ , como una ecuación.

$$y = 3x - 8$$

**Paso 2.** Se intercambian las variables  $x, y$ .

$$x = 3y - 8,$$

**Paso 3.** Se despeja la variable “ $y$ ” de la expresión  $x = 3y - 8$ ,

$$\text{El } -8 \text{ pasa sumando a } x; \quad x + 8 = 3y$$

$$\text{El } 3 \text{ que está multiplicando a } y, \text{ pasa dividiendo a, } x + 8; \quad y = \frac{x+8}{3}$$

**Paso 4.** Se sustituye “ $y$ ” por  $f^{-1}(x)$  ;  $f^{-1}(x) = \frac{x+8}{3}$

<sup>6</sup> (Hinojosa, Matemáticas IV, 2014)

**Ejemplo 2**

Encuentra la función inversa de  $f(x) = \frac{x+8}{3}$ ,

**Paso 1.** Se reescribe la función  $f(x) = \frac{x+8}{3}$ , como una ecuación.

$$y = \frac{x+8}{3}$$

**Paso 2.** Se intercambian las variables  $x, y$ .

$$x = \frac{y+8}{3}$$

**Paso 3.** Se despeja la variable “ $y$ ” de la expresión  $x = \frac{y+8}{3}$

$$3x = y + 8 \rightarrow 3x - 8 = y, \text{ se reescribe como : } y = 3x - 8$$

**Paso 4.** Se sustituye “ $y$ ” por  $f^{-1}(x)$  ;  $f^{-1}(x) = 3x - 8$

**Ejemplo 3**

Encuentra la función inversa de  $f(x) = \frac{2x-5}{4}$ ,

**Paso 1.** Se reescribe la función  $f(x) = \frac{2x-5}{4}$ , como una ecuación.

$$y = \frac{2x-5}{4}$$

**Paso 2.** Se intercambian las variables  $x, y$ .

$$x = \frac{2y-5}{4}$$

**Paso 3.** Se despeja la variable “ $y$ ” de la expresión  $x = \frac{2y-5}{4}$

El 4 que está dividiendo pasa multiplicando a  $x$ ;  $4x = 2y - 5$

el  $-5$  pasa sumando al  $4x \rightarrow 4x + 5 = 2y$ , y el 2 pasa dividiendo  $y = \frac{4x+5}{2}$

**Paso 4.** Se sustituye “ $y$ ” por  $f^{-1}(x)$  ;  $f^{-1}(x) = \frac{4x+5}{2}$

**Actividad 3.2****Instrucciones**

1. Dada las siguientes funciones encuentra la función inversa.
2. Se deberá resolver en la libreta de apuntes.
3. Para cada ejercicios grafica ambas funciones (original e inversa) en Geogebra y copia las imágenes a tu libreta.

|          |                 |          |                           |
|----------|-----------------|----------|---------------------------|
| <b>1</b> | $f(x) = 3 - 5x$ | <b>2</b> | $f(x) = \frac{4x - 3}{3}$ |
|          |                 |          |                           |

|          |                 |          |                          |
|----------|-----------------|----------|--------------------------|
| <b>3</b> | $f(x) = 8x - 4$ | <b>4</b> | $f(x) = \frac{4 + x}{5}$ |
|          |                 |          |                          |

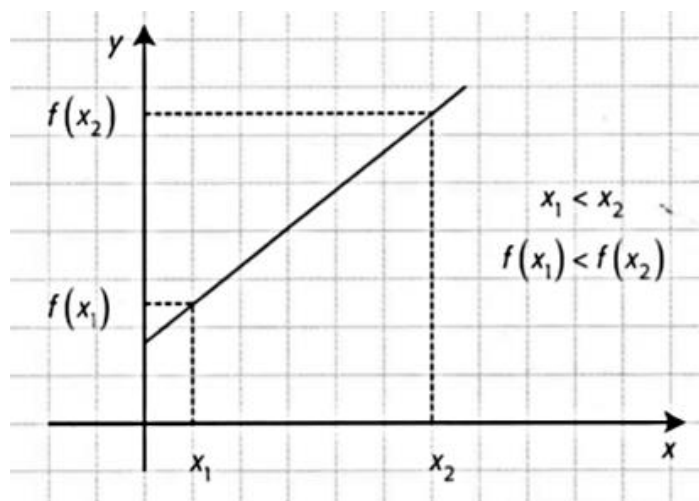
**Evaluación**

- Esta actividad se evalúa con una lista de cotejo de solución de ejercicios (Instrumento de evaluación 6)

### Funciones crecientes

A medida que aumenta el valor de  $x$ , aumenta el valor de  $y$ . por lo tanto, será creciente en un intervalo si se cumple la siguiente condición:

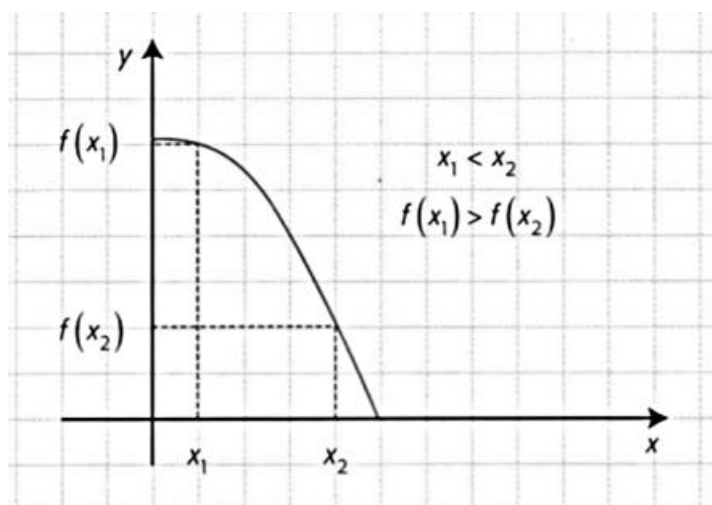
$$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$



### Funciones decrecientes

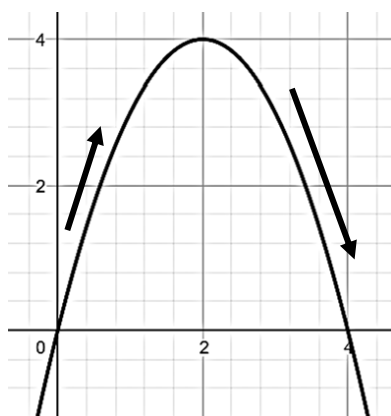
A medida que aumenta el valor de  $x$ , disminuye el valor de  $y$ . por lo tanto, será decreciente en un intervalo si se cumple la siguiente condición:

$$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$





### Ejemplo 1

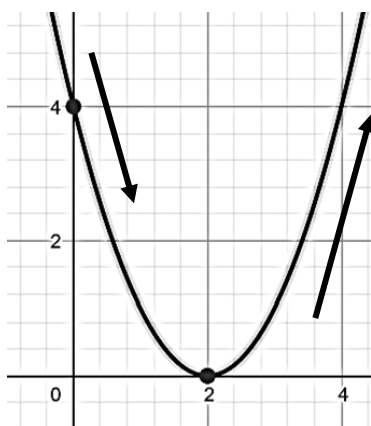


En la siguiente imagen identificar en qué intervalo es creciente y decreciente

**Intervalo creciente:**  $[0, 2]$

**Intervalo decreciente :**  $[2, 4]$

### Ejemplo 2

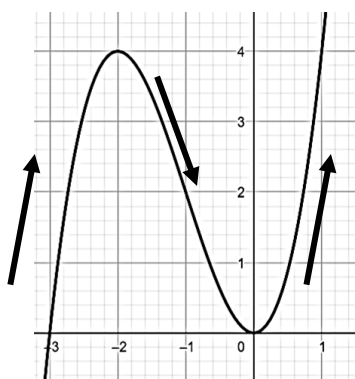


En la siguiente imagen identificar en qué intervalo es creciente y decreciente

**Intervalo creciente:**  $[2, 4]$

**Intervalo decreciente :**  $[0, 2]$

### Ejemplo 3



En la siguiente imagen identificar en qué intervalo es creciente y decreciente

**Intervalo creciente:**  $[-3, -2]$  y  $[0, 1]$

**Intervalo decreciente:**  $[-2, 0]$

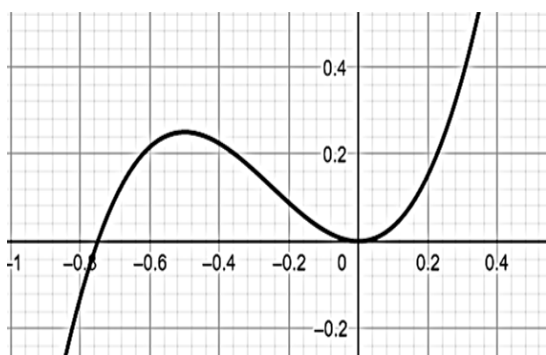


### Actividad 3.3

#### Instrucciones

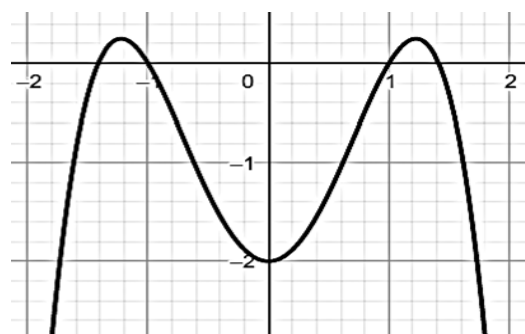
1. Observa cada una de las siguientes gráficas y subraya con marcador rojo cuando la función sea creciente y de color azul cuando sea decreciente.
2. Identifica los intervalos crecientes y decrecientes para cada gráfica.

A)



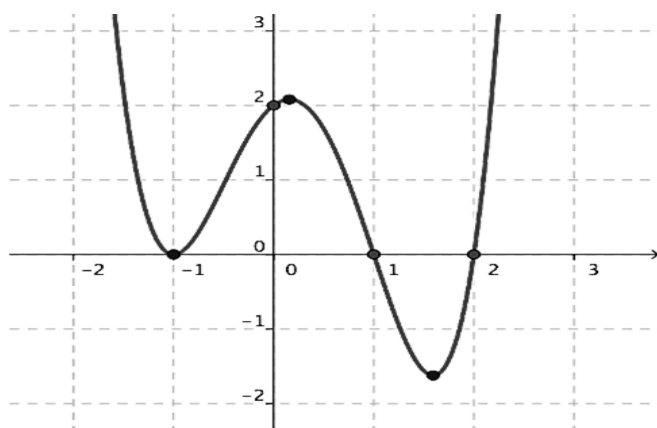
Intervalo creciente:  
Intervalo decreciente :

B)



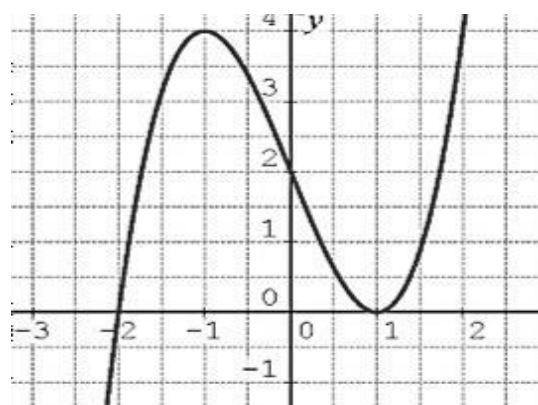
Intervalo creciente:  
Intervalo decreciente :

C)



Intervalo creciente:  
Intervalo decreciente :

D)



Intervalo creciente:  
Intervalo decreciente :

#### Evaluación

- Se evalúa con lista de cotejo (Instrumento de evaluación 7)



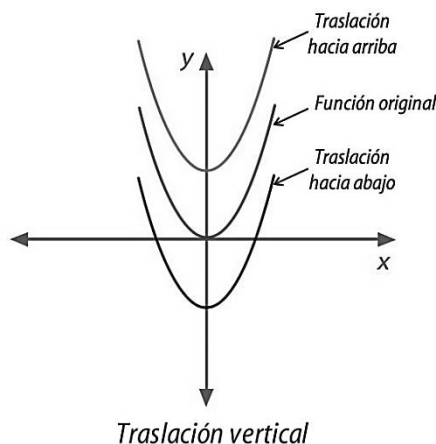
## Traslaciones Verticales y Horizontales

Las Traslaciones verticales y horizontales son los desplazamientos de una función en el sistema de coordenadas  $(x,y)$ .

### Traslación vertical.

Si realizamos una **traslación vertical** de una función, la gráfica se moverá de un punto a otro punto determinado en el sentido del eje “y”, es decir, hacia arriba o hacia abajo.

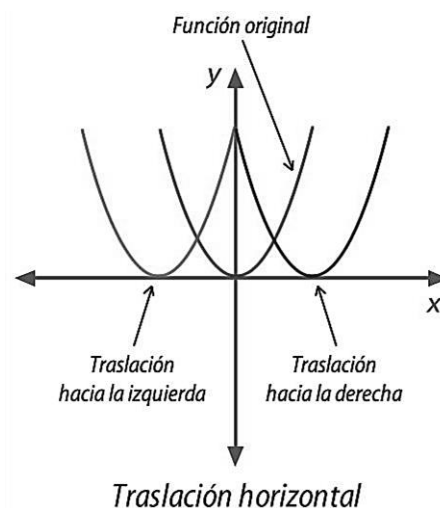
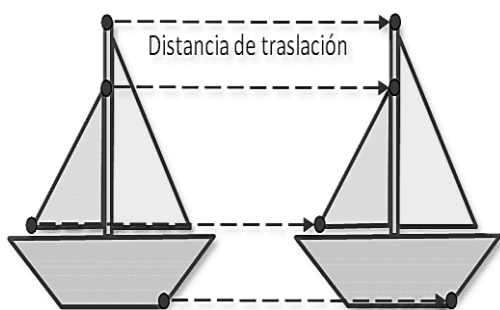
- a)  $f(x) + c$
- b)  $f(x) - c$



### Traslación Horizontal

Si realizamos una **traslación horizontal** de una función, la gráfica se moverá de un punto a otro punto determinado en el sentido del eje “x”, es decir, hacia la derecha o hacia la izquierda.<sup>7</sup>

- a)  $f(x + c)$
- b)  $f(x - c)$



<sup>7</sup> Carolina Saavedra, Portal educativo. Traslaciones verticales y horizontales. Recuperado el 21 de noviembre de 2020 de: <https://www.portaleducativo.net/cuarto-medio/8/traslaciones-horizontales-verticales>



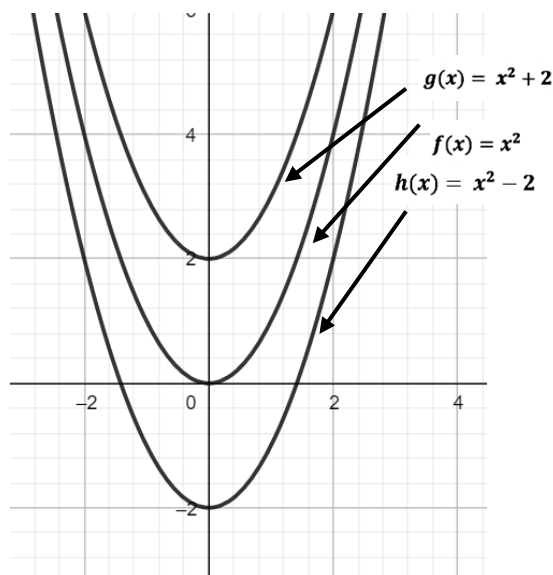
### Ejemplo 1. Desplazamiento Vertical

Asignar valores en el intervalo cerrado de  $[-2, 2]$  para las siguientes funciones y graficar.

a)  $f(x) = x^2$    b)  $g(x) = x^2 + 2$    c)  $h(x) = x^2 - 2$

Se observa que si “c” es una constante diferente de cero y  $f(x)$  es una función entonces se realiza lo siguiente:

- Se tiene  $g(x) = x^2 + 2$ , se trasladará “2” unidades arriba.
- Si se tiene  $h(x) = x^2 - 2$ , se trasladará “2” unidades abajo.



### Ejemplo 2. Desplazamiento Horizontal

Asignar valores en el intervalo cerrado de  $[-2, 2]$  para las siguientes funciones y graficar.

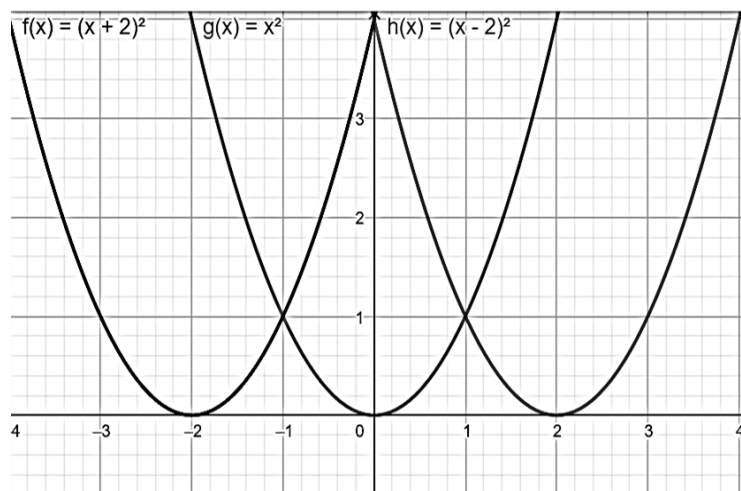
Función a)  $g(x) = x^2$

b)  $f(x) = (x + 2)^2$

c)  $h(x) = (x - 2)^2$

Se observa que “c” es una constante diferente de cero y  $f(x)$ , es una función, por lo tanto se realiza lo siguiente:

- Si se tiene  $f(x) = (x + 2)^2$  se trasladará 2 unidades a la izquierda.
- Si se tiene  $f(x) = (x - 2)^2$ , se trasladará 2 unidades a la derecha.



**Actividad 3.4****Instrucciones**

1. Asigna valores de  $[-5,5]$  y grafica en tu libreta de apuntes, por medio de traslaciones verticales y horizontales de las gráficas  $f(x) = x$ ,  $g(x) = x^2$  y  $h(x) = x^3$

1.  $f(x) = x + 1$ ,  $f(x) = x - 2$

2.  $g(x) = x^2 - 5$ ,  $g(x) = x^2 + 5$

3.  $g(x) = (x - 3)^2$ ,  $g(x) = (x + 3)^2$

4.  $h(x) = (x + 4)^3$ ,  $h(x) = (x - 4)^3$

- Se evaluará con lista de cotejo (Instrumento de evaluación 8)

**Composición de funciones**

Se presenta al tener dos funciones  $f(x)$  y  $g(x)$ . Si el rango de  $g(x)$  está incluido en el dominio de  $f$ , entonces la función compuesta  $f(g(x))$ , se denomina  $f$  con  $g$ . A sí mismo se puede definir la función compuesta  $g$  con  $f$ ,  $g(f(x))$ .

**Ejemplo 1**

Si  $f(x) = 3x + 2$  y  $g(x) = 4 - 2x$ , encontrar  $f \circ g$  y  $g \circ f$

1. Se sustituye  $f(g(x)) = f \circ g$

$$f(x) = 3x + 2$$

$$f(4 - 2x) = 3(4 - 2x) + 2$$

$$f(4 - 2x) = 12 - 6x + 2$$

$$f \circ g = 14 - 6x$$

2. Se sustituye  $g(f(x)) = g \circ f$

$$g(x) = 4 - 2x$$

$$g(3x + 2) = 4 - 2(3x + 2)$$

$$g(3x + 2) = 4 - 6x - 4$$

$$g \circ f = -6x$$

**Ejemplo 2**

Si  $f(x) = 2x$  y  $g(x) = 3x + 1$ , encontrar  $f \circ g$  y  $g \circ f$

1. Se sustituye  $f(g(x)) = f \circ g$

$$f(3x + 1) = 2(3x + 1)$$

$$f(3x + 1) = 6x + 2$$

$$f \circ g = 6x + 2$$

2. Se sustituye  $g(f(x)) = g \circ f$

$$g(2x) = 3(2x) + 1$$

$$g(2x) = 6x + 1$$

$$g \circ f = 6x + 1$$

**Actividad 3.5****Instrucciones**

1. Encontrar  $f \circ g$  y  $g \circ f$ , en tu libreta de apuntes, dados los valores de las funciones siguientes.

a)  $f(x) = 3x^2 + 4x - 3$  y  $g(x) = x + 1$

b)  $f(x) = 4x - 3$  y  $g(x) = 2x + 8$

c)  $f(x) = 15 - x$  y  $g(x) = 3x - 2x^2$

d)  $f(x) = 5x + 4$  y  $g(x) = \frac{2}{x}$

**Evaluación :** Se evalúa con lista de cotejo (Instrumento de evaluación 9)

**VALORANDO MI AVANCE**

Para concluir, contesta en tu libreta las siguientes preguntas con respecto de lo que aprendiste en este bloque:



- ¿Qué estoy aprendiendo?
- ¿En qué aprendizajes esperados aún tengo dificultades?
- ¿Qué acciones puedo realizar para mejorar mi desempeño?
- ¿Qué estrategias de estudio me han funcionado en este bloque?

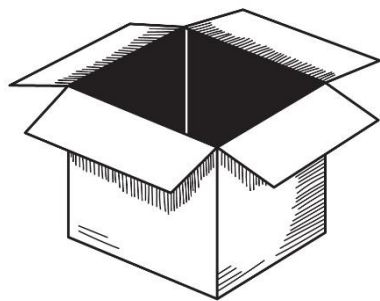
## BLOQUE II. Funciones polinomiales

### Actividad 1

- **Aprendizaje Esperado:** Construye modelos gráfico, algebraico y numérico de funciones polinomiales favoreciendo el trabajo colaborativo en los problemas de su entorno.
- **Atributo (s):** 1.1 Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades / 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
- **Conocimiento (s):** Modelo algebraico general de funciones polinomiales

#### Lectura previa

Lee con mucha atención el siguiente texto:



Las funciones polinomiales son una parte de las funciones algebraicas en las que se destinan todos los tipos de polinomios (de una sola variable), los cuales tienen diversas aplicaciones en la sociedad: El *cambio del dólar*, la *cantidad máxima de producción* que una empresa puede realizar antes de comenzar a tener pérdidas, el *punto de equilibrio* empresarial entre la oferta y demanda de cierto producto, el *volumen máximo* que un objeto puede contener según la variación de sus medidas, la *depreciación* de cierto bien, la *cantidad de calor* que es capaz de transmitir un cuerpo caliente a un cuerpo frío, son unos cuantos ejemplos que podemos construir o analizar en la vida común de las matemáticas.

Cuando se desea trabajar el modelo polinomial para este tipo de funciones, tenemos que considerar que engloba a los que desde álgebra se han estado tratando, hasta aquellos nuevos que presentan patrones gráficos cuyo análisis requiere de manipulación analítica y geométrica algo sofisticada.

Antes de realizar los ejercicios pertinentes, definiremos los conceptos a trabajar para la primera actividad y de ahí los que de igual manera serán empleados en las posteriores debido a que las funciones polinomiales se dividen en casos particulares.

Una **función polinomial** es aquella que se define como:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$$



Dónde:

$a_i$  = *coeficientes del polinomio*

$x$  = *variable independiente*

$n$  = *grado del polinomio (normalmente entero positivo)*

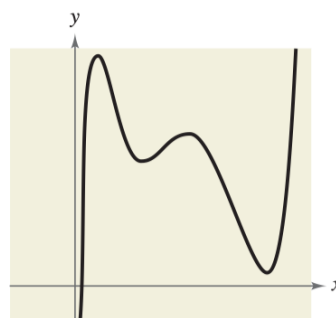
$a_0$  = *término independiente*

Las características que tienen en forma gráfica son dependen del grado del polinomio que estos sean (grado absoluto) el cual lo podemos dividir en: lineal (grado 1), cuadrático (grado 2), cúbico (grado 3) y a partir de los anteriores en grado par o impar (por la forma gráfica que estos tienen).

La gráfica de una función polinomial, es una curva suave, no presenta picos ni cambios drásticos de variación como otro tipo de funciones y son consideradas funciones continuas (ya que no presentan saltos, interrupciones o como coloquialmente se le dice en matemáticas: se pueden trazar a partir de tal manera que no levantamos el lápiz)



Ejemplo gráfico de una función polinomial continua.



Ejemplo gráfico de los cambios de variación suave que tiene una función polinomial.

Figura tomada de Larson, R. Falvo, D. (2012). *Precálculo*. México: Cengage Learning Editores. Octava edición

Como parte final teórica, tenemos que hablar sobre las raíces, también conocidas como las soluciones de la función polinomial. Casi siempre cuando se habla de raíces, se hace referencia a las raíces de una planta, la cual entre o traspasa la tierra, en su semejanza a una función, es cuando esta corta o traspasa al eje  $x$ , pero lo hace en un valor particular, y podemos hablar de la existencia de estos o no, así como de la cantidad que pueden tener, con valores reales o imaginarios.

La cantidad de raíces de un polinomio varía según el grado del mismo que tengamos, siendo la mayor cantidad de estas  $n$  (el cual representa la potencia más grande que tiene la expresión) y siendo la menor cantidad 0 o 1, dependiendo del tipo de función.

Los polinomios los podemos dividir en dos tipos, de grado par (2, 4, 6, ...) y de grado impar (1, 3, 5, 7, 9, ...), teniendo como características principales:



| Grado impar                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | Grado par                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>La cantidad mínima de raíces que tendrá la función 1, y la cantidad máxima es <math>n</math>, ya que por el comportamiento gráfico que tiene, al menos corta una vez al eje de las <math>x</math>, como el caso de la función lineal o de grado uno, ya que toda línea recta oblicua, siempre corta al eje <math>x</math>.</p> <p>Lo anterior se debe a que el comportamiento gráfico de la función es como una especie de "s" que puede ir desde <math>-\infty</math> a <math>+\infty</math> o viceversa.</p> | <p>La cantidad mínima de raíces que puede tener una función de este grado varía según el valor que tengan los parámetros y no necesariamente por la potencia que este tenga. En resumen, puede tener 0 o 1 raíz como mínimo, y la cantidad máxima depende de <math>n</math>.</p> <p>Esto se debe a que el comportamiento gráfico es parabólico o de brazos hacia arriba o abajo, como el caso de una función de segundo grado o cuadrática, analizado en la asignatura de Matemáticas I y Matemáticas III, el cual si corta al eje <math>x</math> en dos puntos tiene dos raíces; si sólo el vértice toca al eje <math>x</math>, tiene una raíz; pero si la gráfica nunca intersecta al eje, entonces no tiene soluciones (al menos no reales, pero si imaginarias).</p> |

### Actividad 2.1

I. Relaciona las siguientes funciones polinomiales con el respectivo nombre que le corresponde:

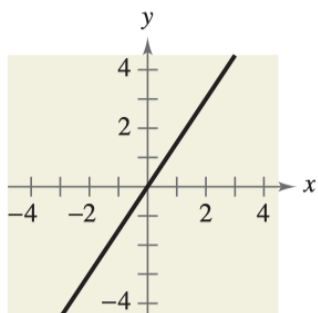
- |                              |                |
|------------------------------|----------------|
| a) $P(x) = 3x - 5x^2 + 3$    | ( ) Lineal     |
| b) $P(x) = 3 - x$            | ( ) Cuadrático |
| c) $P(x) = 2x^2 - 4x^3 + 8x$ | ( ) Cúbico     |
| d) $P(x) = x^4 - 2x^2 + 6$   | ( ) Cuarto     |
| e) $P(x) = x^3 - x^5$        | ( ) Quinto     |

II. Empleando las funciones del número anterior, determina lo siguiente: El valor del término independiente

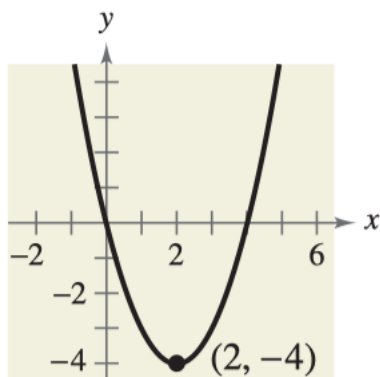
- a) \_\_\_\_\_  
b) \_\_\_\_\_  
c) \_\_\_\_\_  
d) \_\_\_\_\_  
e) \_\_\_\_\_



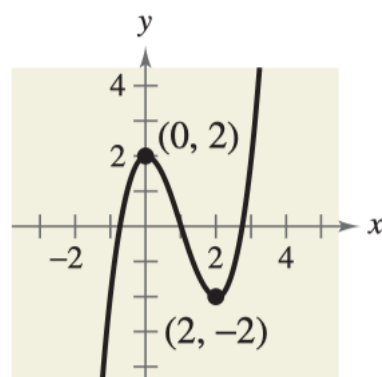
III. Según las gráficas dadas a continuación, escribe en la línea correspondiente si es una función polinomial o no lo es.



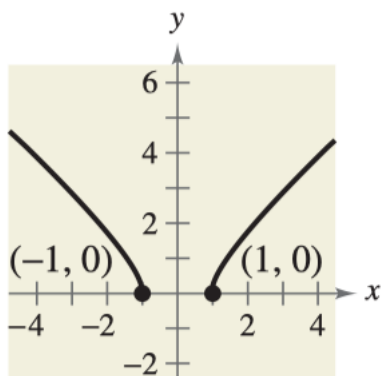
a) \_\_\_\_\_



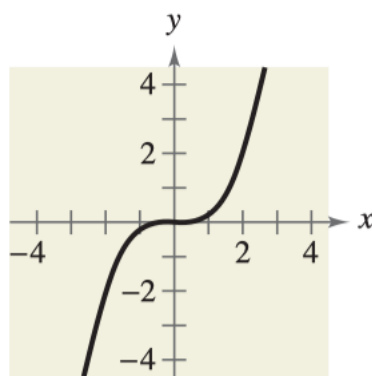
b) \_\_\_\_\_



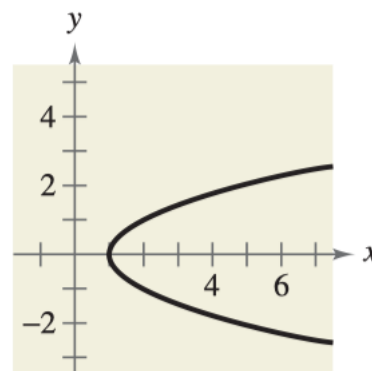
c) \_\_\_\_\_



d) \_\_\_\_\_



e) \_\_\_\_\_



f) \_\_\_\_\_

Figura tomada de Larson, R. Falvo, D. (2012). *Precálculo*. México: Cengage Learning Editores. Octava edición

### Evaluación

- Esta actividad será evaluada con el instrumento de evaluación 10





## Actividad 2

- **Aprendizaje Esperado:** Construye modelos gráfico, algebraico y numérico de funciones polinomiales favoreciendo el trabajo colaborativo en los problemas de su entorno.
- **Atributo (s):** 1.1 Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades / 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
- **Conocimiento (s):** Función lineal/Modelo gráfico/Modelo algebraico/Raíces

### Lectura previa

Lee con mucha atención el siguiente texto:

#### **FUNCIÓN LINEAL**

La **función lineal** es la función polinomial más simple que existe y que modela muchas situaciones sociales o prácticas profesionales, según el uso que le deseemos dar. Es parte de las funciones impares, ya que es de grado uno, pero sin tener un comportamiento curvo alguno.

En matemáticas III, hace su aparición como el lugar geométrico de todos los puntos en el plano de tal manera que, tomados de par en par, tienen el mismo valor de pendiente.

Los conceptos antes empleados en esa asignatura serán generalizados en este bloque para usos prácticos y de análisis matemático.

Su forma es:

$$P(x) = a_1x + a_0 \quad \text{o} \quad P(x) = ax + b$$

Dónde:

*a = es el valor de la pendiente*  
*b = la ordenada al origen*

La gráfica de la función lineal tiene las siguientes características:

- El dominio de la función es el conjunto de todos los números reales.
- El rango de la función es el conjunto de todos los números reales.
- La gráfica tiene una intersección con el eje de  $x$  de  $\left(-\frac{b}{m}, 0\right)$  y una intersección con el eje  $y$  de  $(0, b)$ .
- La gráfica es creciente si  $m > 0$ , decreciente si  $m < 0$ , y constante si  $m = 0$

Hay dos tipos especiales de funciones lineales, la función constante y la función identidad.

Una **función constante** tiene la forma

$$f(x) = c$$

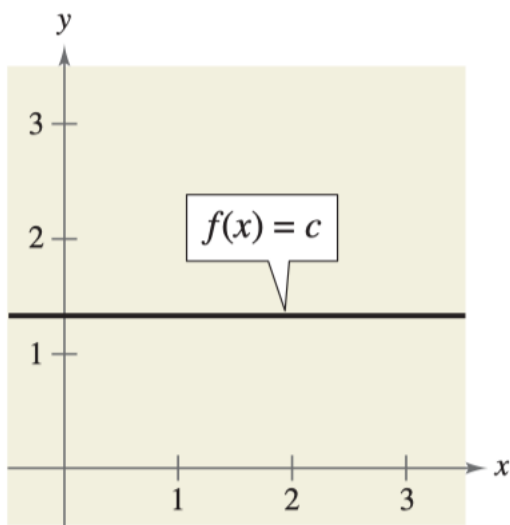
y tiene el dominio de todos los números reales con rango formado por un solo número real  $c$ . La gráfica de una función constante es una recta horizontal.



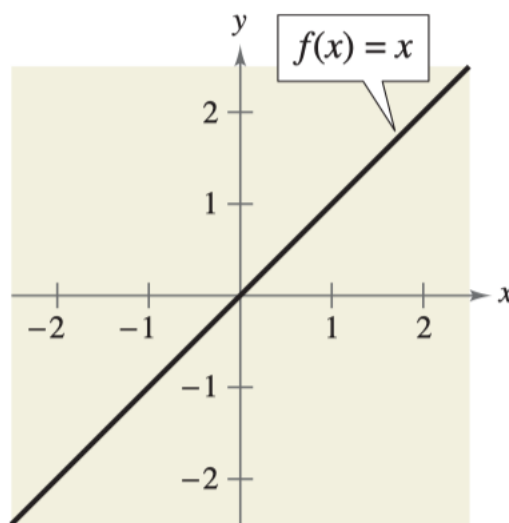
La **función identidad** tiene la forma

$$f(x) = x$$

Su dominio y rango son el conjunto de todos los números reales. La función identidad tiene una pendiente de  $m = 1$  e intersección con el eje  $y$  en  $(0, 0)$ . La gráfica de la función identidad es una recta para la cual cada coordenada  $x$  es igual a la correspondiente coordenada  $y$ . La gráfica es siempre creciente.



Gráfica de la función constante



Gráfica de la función identidad

Figura tomada de Larson, R. Falvo, D. (2012). *Precálculo*. México: Cengage Learning Editores. Octava edición

## Actividad 2.2

### Instrucciones

1. Resuelve correctamente cada uno de los siguientes ejercicios que se presentan.
2. La solución se tiene que hacer en hojas en blanco o en la libreta, ya que algunas soluciones llevan procesos algebraicos necesarios para llegar a la respuesta correcta. Los ejercicios en donde sean gráficos puedes recortarlos (siempre y cuando la parte de atrás no sea parte de otro gráfico) o dibujarlos en tu libreta.



I. Ejercicio de repaso:

Relaciona cada función con su nombre.

1.  $f(x) = \llbracket x \rrbracket$

2.  $f(x) = x$

3.  $f(x) = 1/x$

4.  $f(x) = x^2$

5.  $f(x) = \sqrt{x}$

6.  $f(x) = c$

7.  $f(x) = |x|$

8.  $f(x) = x^3$

9.  $f(x) = ax + b$

(a) función cuadrática

(b) función raíz cuadrada

(c) función cúbica

(d) función lineal

(e) función constante

(f) función valor absoluto

(g) función mayor entero

(h) función recíproca

(i) función identidad

II. En los siguientes ejercicios determina la función lineal que representa al par de puntos dados.

a)  $f(1) = 4, f(0) = 6$

b)  $f(-3) = -8, f(1) = 2$

c)  $f(5) = -4, f(-2) = 17$

d)  $f(3) = 9, f(-1) = -11$

e)  $f\left(\frac{1}{2}\right) = -6, f(4) = -3$

III. Realiza la representación gráfica de las siguientes funciones lineales, empleando la tabla de valores que se te da. Por cada función lineal, dibújala en planos diferentes.

| x  | f(x) |
|----|------|
| 5  |      |
| 0  |      |
| -3 |      |

a)  $f(x) = 3x - 2$

b)  $f(x) = -4x$

c)  $f(x) = -2x + 5$

d)  $f(x) = x + 3$

IV. Resuelve cada uno de los siguientes problemas aplicados empleando las funciones lineales, en las que al final (te lo pida o no el problema) realiza la gráfica de la misma.

a) En las 10 primeras semanas de cultivo de una planta, que medía 2 cm, se ha observado que su crecimiento es directamente proporcional al tiempo, viendo que en la primera semana ha pasado a medir 2.5 cm. Establecer una función afín que dé la altura de la planta en función del tiempo y representar gráficamente.

b) Por la renta de un coche cobran 100 € diarios más 0.30 € por kilómetro. Encuentra la ecuación de la recta que relaciona el coste diario con el número de kilómetros y elabora la gráfica.

Si en un día se ha hecho un total de 300 km, ¿Qué importe debemos abonar?

Evaluación

- Esta actividad será evaluada con el instrumento de evaluación 10

## Actividad 3

- **Aprendizaje Esperado:** Construye modelos gráfico, algebraico y numérico de funciones polinomiales favoreciendo el trabajo colaborativo en los problemas de su entorno.
- **Atributo (s):** 1.1 Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades / 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
- **Conocimiento (s):** Funciones cuadráticas. Modelo gráfico. Raíces y el discriminante. Formas: estándar y factorizada.

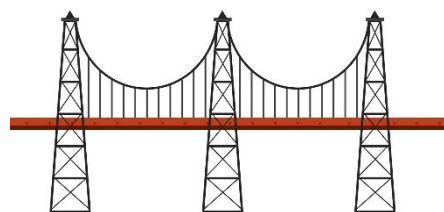
### Lectura previa

Lee con mucha atención el siguiente texto:

Una de las funciones polinomiales más comunes, tanto en ejercicios como en aplicaciones, es la **función cuadrática** o polinomio de segundo grado por su representación gráfica, es posible observar cambios de pendiente, así como la determinación del valor máximo o mínimo que este tiene, las posibles raíces, valores y existencia.

Algunas de las aplicaciones más comunes que tenemos con respecto a la función cuadrática son:

1. Ecuación de **demanda** en producción.
2. La ecuación de **costo** en producción.
3. La ecuación de **utilidad** en producción.
4. El movimiento de **una pelota de béisbol**.
5. La trayectoria de un **paquete al ser lanzado de un avión**.
6. Trayectoria de un **foco de luz**.
7. Trayectoria de **un balón de fútbol** a ser pateado.
8. Lanzamiento de **una pelota de béisbol por el pichet**, las trayectorias pueden ser parabólicas.
9. **Las guayas** que poseen los puentes generan un descanso en forma parabólico.
10. El **chorro** de la fuente describe una función cuadrática.



La función cuadrática la vemos en nuestra vida diaria y tiene muchos usos, *en la optimización* es fundamental.

Una **función cuadrática** tiene forma de parábola, pero de las que se estudiaron en Matemáticas III, solamente trabajaremos con aquellas que sean verticales hacia arriba y abajo, ya que su expresión matemática es la de forma:

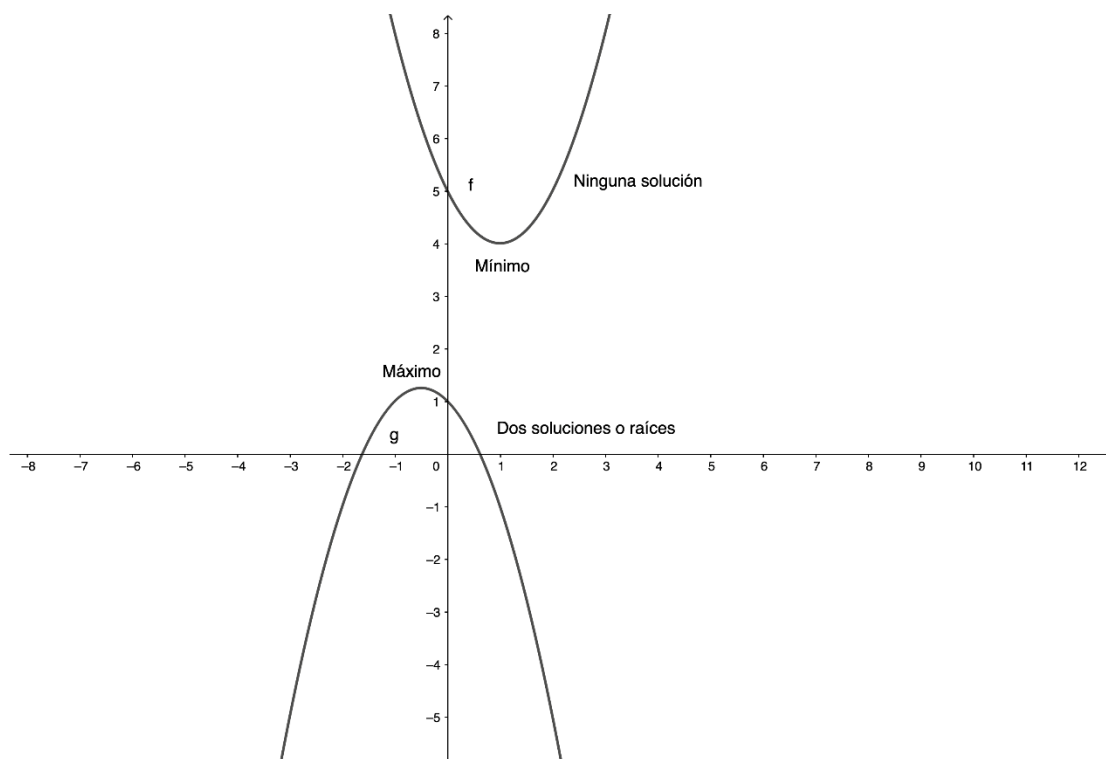
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Donde  $a, b, y c$  son números reales y  $a \neq 0$ .



Algo que tendremos que considerar es sobre el concepto de soluciones de una función cuadrática, ahora recibirán el nombre de raíces del polinomio, y para el caso de esta, tendrá 2, 1 o 0 raíces. Las formas de obtención de las mismas serán mediante procesos ya conocidos: despejar la incógnita, factorizar o emplear la fórmula de segundo grado.

Los vértices tomarán también un nuevo nombre en este tema, y serán conocidos como punto máximo o mínimo de la función, será máximo cuando la función sea hacia abajo y mínimo cuando abra hacia arriba. Los valores máximo y mínimo jugarán un papel importante de ahora en adelante, debido a los múltiples usos e interpretaciones que tienen en el ámbito aplicado, así como su clasificación en locales y absolutos.



Para el caso de una solución de la función cuadrática, gráficamente, el vértice en el único punto que toca al eje x.

### Actividad 2.3

1. Resuelve correctamente cada uno de los siguientes ejercicios que se presentan.
2. La solución se tiene que hacer en hojas en blanco o en la libreta, ya que algunas soluciones llevan procesos algebraicos necesarios para llegar a la respuesta correcta. Auxíliate del Geogebra sólo para comparar tus procesos matemáticos.



- I. Da las coordenadas del vértice e indica si la parábola abre hacia arriba o hacia abajo: (Aquí haremos uso de los conceptos aprendidos en Matemáticas III)
- $y = 1 + 2x + x^2$
  - $y = (1 - x)^2 - 2$
  - $y = (x + 1)^2 - 2(x - 1)^2$
- II. ¿Cuál es la ecuación de la parábola idéntica a  $y = 2x^2$  con vértice en  $(1, 5)$ ?
- III. Bosqueja las siguientes parábolas y determina sus vértices, así como si es un máximo o mínimo y sus raíces si es que tiene.
- $y = 2x^2 + 3x - 1$
  - $y = 4x - x^2$
  - $y = 3 - x - 3x^2$
  - $y = 4x^2 + 16x + 4$
- IV. Determina el valor mínimo o máximo, según el caso, de las funciones siguientes:
- $f(x) = x^2 - 3x$
  - $f(x) = 2x - 5x^2$
  - $f(x) = 1 - x - x^2$
  - $f(x) = 3x^2 + x - 1$
- V. Escribe la forma estándar de la ecuación de la parábola que tiene el vértice indicado y cuya gráfica pasa por el punto dado
- Vértice  $(-2, 5)$ ; punto  $(0, 9)$
  - Vértice  $(5, 12)$ ; punto  $(7, 15)$
  - Vértice  $(-2, -2)$ ; punto  $(-1, 0)$
- VI. Aplicaciones de la ecuación cuadrática, resuelve a continuación cada uno de los siguientes problemas que se te presentan:
- La trayectoria de un clavadista está dada por:  $y = -\frac{4}{9}x^2 + \frac{24}{9}x + 12$ , donde  $y$  es la altura (en pies) y  $x$  es la distancia horizontal desde el extremo del trampolín (en pies). ¿Cuál es la máxima altura del clavadista?
  - La altura  $y$  (en pies) de un balón pateado está dada por  $y = -\frac{16}{2025}x^2 + \frac{9}{5}x + 1.5$ , donde  $x$  es la distancia horizontal (en pies) desde el punto en el que el balón es pateado.
    - ¿A qué altura está el balón cuando es pateado?
    - ¿Cuál es la máxima altura de la patada?
    - ¿Qué tan larga es la patada?



- c) Un fabricante de accesorios para iluminación tiene costos diarios de producción expresados por:  $C = 800 - 10x + 0.25x^2$ , donde  $C$  es el costo total (en dólares) y  $x$  es el número de unidades producidas. ¿Cuántos accesorios deben ser producidos cada día para dar un costo mínimo?

### **Evaluación**

- Esta actividad será evaluada con el instrumento de evaluación 10



## Actividad 4

- **Aprendizaje Esperado:** Construye modelos gráfico, algebraico y numérico de funciones polinomiales favoreciendo el trabajo colaborativo en los problemas de su entorno.
- **Atributo (s):** 1.1 Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades / 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
- **Conocimiento (s):** Modelo gráfico. Raíces: Teorema del residuo.

### Lectura previa

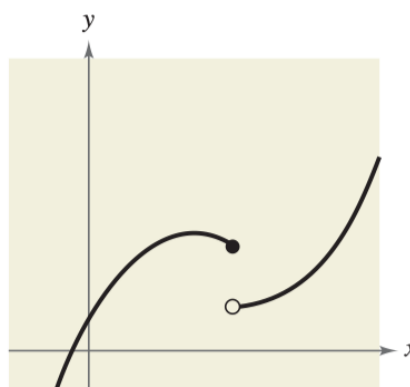
Lee con mucha atención el siguiente texto:

Uno puede usar **funciones polinomiales** para analizar situaciones financieras; por ejemplo, la forma en que el ingreso está relacionado con gastos hechos en publicidad.

En esta sección estudiaremos características básicas de las gráficas de las funciones polinomiales. La primera característica es que la gráfica de una función polinomial es continua. En esencia, esto significa que la gráfica no tiene interrupciones, huecos o brechas.



(a) Las funciones polinomiales tienen gráficas continuas



(b) Las funciones con gráficas que no son continuas no son funciones polinomiales

Figura tomada de Larson, R. Falvo, D. (2012). *Precálculo*. México: Cengage Learning Editores. Octava edición

La segunda característica es que la gráfica de una función polinomial tiene cambios de dirección suaves y redondeados, como se ilustra en la figura siguiente de la izquierda. Una función polinomial no puede tener un cambio de dirección agudo. Por ejemplo, la función dada por  $f(x) = |x|$ , que tiene una vuelta aguda en el punto  $(0, 0)$ , como se ve en la figura de la derecha, no es polinomial.



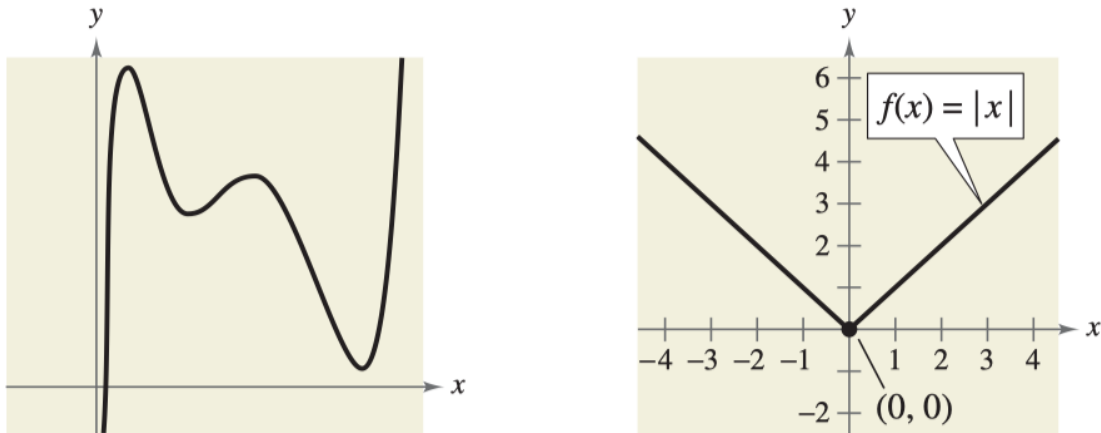
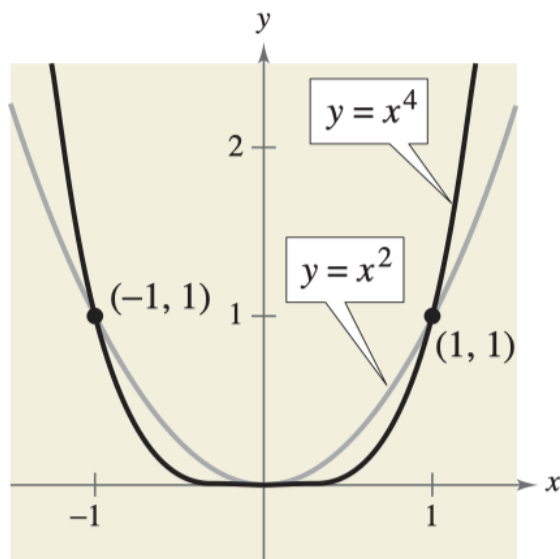
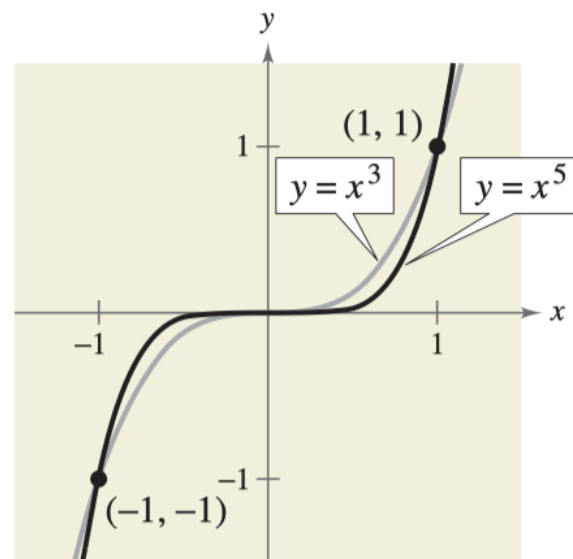


Figura tomada de Larson, R. Falvo, D. (2012). *Precálculo*. México: Cengage Learning Editores. Octava edición

Las funciones polinomiales que tienen las gráficas más sencillas son con monomios de la forma  $f(x) = x^n$ , donde  $n$  es un entero mayor a cero. En la figura siguiente, se puede ver que cuando  $n$  es par, la gráfica es similar a la de  $f(x) = x^2$ , y cuando  $n$  es impar, la gráfica es similar a la de  $f(x) = x^3$ . Además, cuanto mayor sea el valor de  $n$ , la gráfica será más plana cerca del origen. A veces las funciones polinomiales de la forma  $(x) = x^n$  se conocen como funciones potencia.

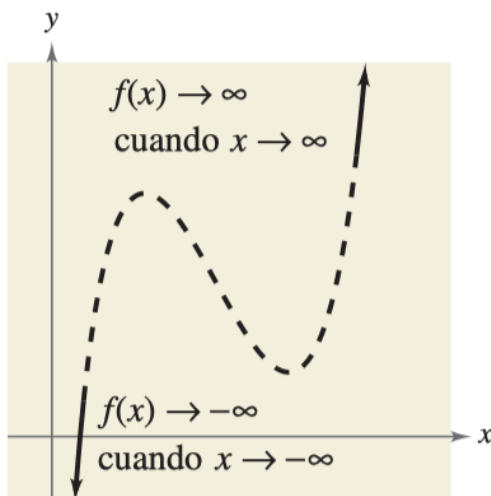


(a) Si  $n$  es par, la gráfica de  $y = x^n$  toca el eje en la intersección con el eje  $x$

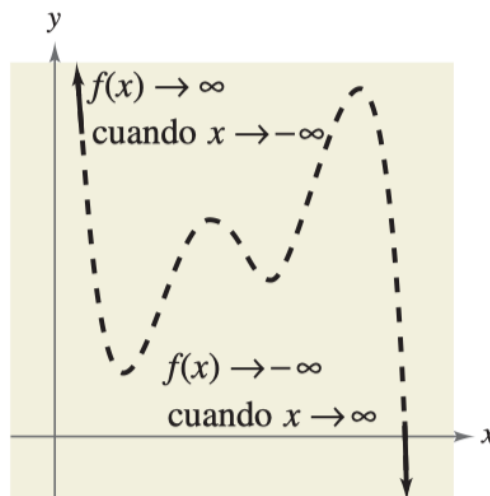


(b) Si  $n$  es impar, la gráfica de  $y = x^n$  corta el eje en la intersección con el eje  $x$

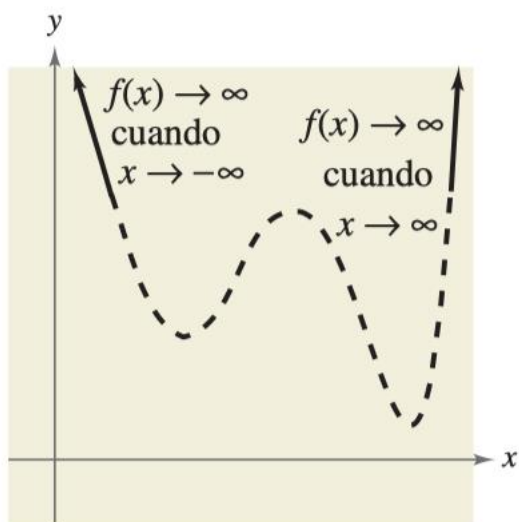
Figura tomada de Larson, R. Falvo, D. (2012). *Precálculo*. México: Cengage Learning Editores. Octava edición



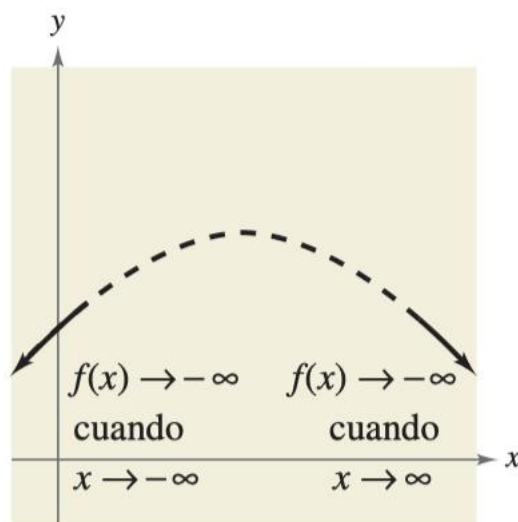
Si el coeficiente principal es positivo ( $a_n > 0$ ), la gráfica baja por la izquierda y sube por la derecha.



Si el coeficiente principal es negativo ( $a_n < 0$ ), la gráfica sube por la izquierda y baja por la derecha.



Si el coeficiente principal es positivo ( $a_n > 0$ ), la gráfica sube por la izquierda y por la derecha.



Si el coeficiente principal es negativo ( $a_n < 0$ ), la gráfica baja por la izquierda y por la derecha.

Figura tomada de Larson, R. Falvo, D. (2012). *Precálculo*. México: Cengage Learning Editores. Octava edición

**Ejemplo 1**

Aplicar la prueba del coeficiente principal

Describe el comportamiento a la derecha e izquierda de la gráfica de cada una de las funciones siguientes.

- a)  $f(x) = -x^3 + 4x$
- b)  $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$
- c)  $f(x) = x^5 - x$

a. Como el grado es impar y el coeficiente principal es negativo, la gráfica sube por la izquierda y baja por la derecha, como se ve en la Figura 1.

b. Como el grado es par y el coeficiente principal es positivo, la gráfica sube por la izquierda y por la derecha, como se ve en la Figura 2.

c. Como el grado es impar y el coeficiente principal es positivo, la gráfica baja por la izquierda y sube por la derecha, como se ve en la Figura 3.

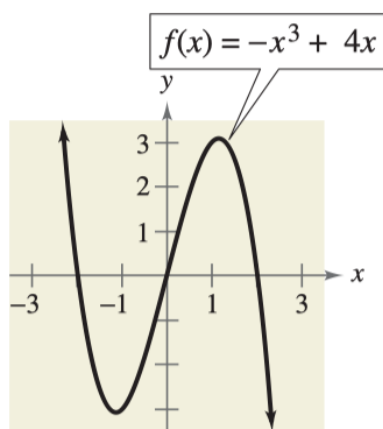


Fig. 1

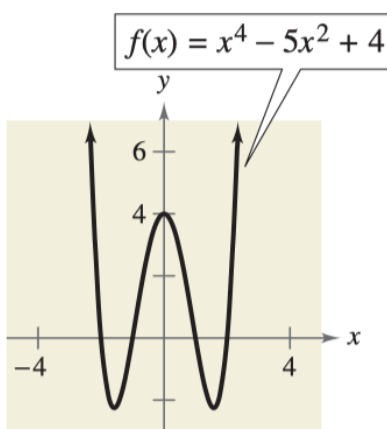


Fig. 2

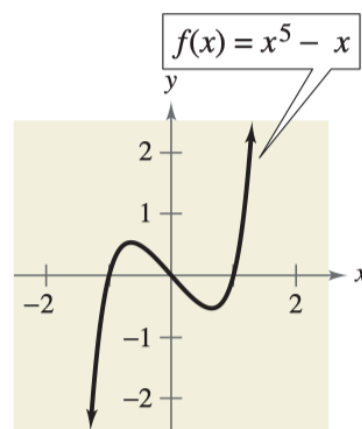


Fig. 3

Figura tomada de Larson, R. Falvo, D. (2012). *Precálculo*. México: Cengage Learning Editores. Octava edición

**CEROS DE FUNCIONES POLINOMIALES**

Recuerda que los ceros de una función de  $x$  son los valores de  $x$  para los cuales la función es cero. Se puede demostrar que para una función  $f$  polinomial de grado  $n$ , las siguientes proposiciones son verdaderas.

1. La función  $f$  tiene, a lo sumo,  $n$  ceros reales.



2. La gráfica de  $f$  tiene, a lo sumo,  $n - 1$  puntos extremos. (Los puntos extremos, también llamados mínimos relativos o máximos relativos, son puntos en los que la gráfica cambia de creciente a decreciente o viceversa.)

Hallar los ceros de funciones polinomiales es uno de los más importantes problemas en álgebra. Hay una fuerte interacción entre los métodos gráfico y algebraico para resolverlo. A veces se puede usar información acerca de la gráfica de una función para ayudar a encontrar sus ceros y, en otros casos, se puede usar información acerca de los ceros de una función para ayudar a trazar su gráfica. Hallar los ceros de funciones polinomiales está estrechamente relacionado con factorizar y determinar intersecciones con el eje  $x$ .

### Declaraciones equivalentes a los ceros polinomiales

Si  $f$  es una función polinomial y  $a$  es un número real, los siguientes enunciados son equivalentes.

1.  $x = a$  es un cero de la función  $f$ .
2.  $x = a$  es una solución de la ecuación polinomial  $f(x) = 0$ .
3.  $(x - a)$  es un factor del polinomio  $f(x)$ .
4.  $(a, 0)$  es una intersección de la gráfica de  $f$  con el eje  $x$ .

### Ejemplo 2

Trazar la gráfica de una función polinomial

Trace la gráfica de  $f(x) = 3x^4 - 4x^3$

Solución

1. Aplica la prueba del coeficiente principal. Como el coeficiente principal es positivo y el grado es par, sabemos que la gráfica finalmente sube por la izquierda y por la derecha.
2. Encuentra los ceros del polinomio. Al factorizar  $f(x) = 3x^4 - 4x^3$  como  $f(x) = x^3(3x - 4)$ , se puede ver que los ceros de  $f$  son  $x = 0$  y  $x = 4/3$  (ambos de multiplicidad impar). Por tanto, las intersecciones con el eje  $x$  se presentan en  $(0, 0)$  y  $(4/3, 0)$ . Agrega estos puntos a tu gráfica.
3. Localiza unos cuantos puntos adicionales. Use los ceros del polinomio para hallar los intervalos de prueba. En cada intervalo de prueba, escoja un valor de  $x$  representativo y evalúe la función polinomial, como se muestra en la tabla.



| Intervalo de prueba     | Valor representativo de $x$ | Valor de $f$      | Signo    | Punto en la gráfica |
|-------------------------|-----------------------------|-------------------|----------|---------------------|
| $(-\infty, 0)$          | $-1$                        | $f(-1) = 7$       | Positivo | $(-1, 7)$           |
| $(0, \frac{4}{3})$      | $1$                         | $f(1) = -1$       | Negativo | $(1, -1)$           |
| $(\frac{4}{3}, \infty)$ | $1.5$                       | $f(1.5) = 1.6875$ | Positivo | $(1.5, 1.6875)$     |

Figura tomada de Larson, R. Falvo, D. (2012). *Precálculo*. México: Cengage Learning Editores. Octava edición

4. Traza la gráfica. Traza una curva continua que pase por los puntos, como se ve en la figura siguiente. Como ambos ceros son de multiplicidad impar, sabemos que la gráfica debe cortar el eje  $x$  en  $x = 0$  y  $x = 4/3$ .

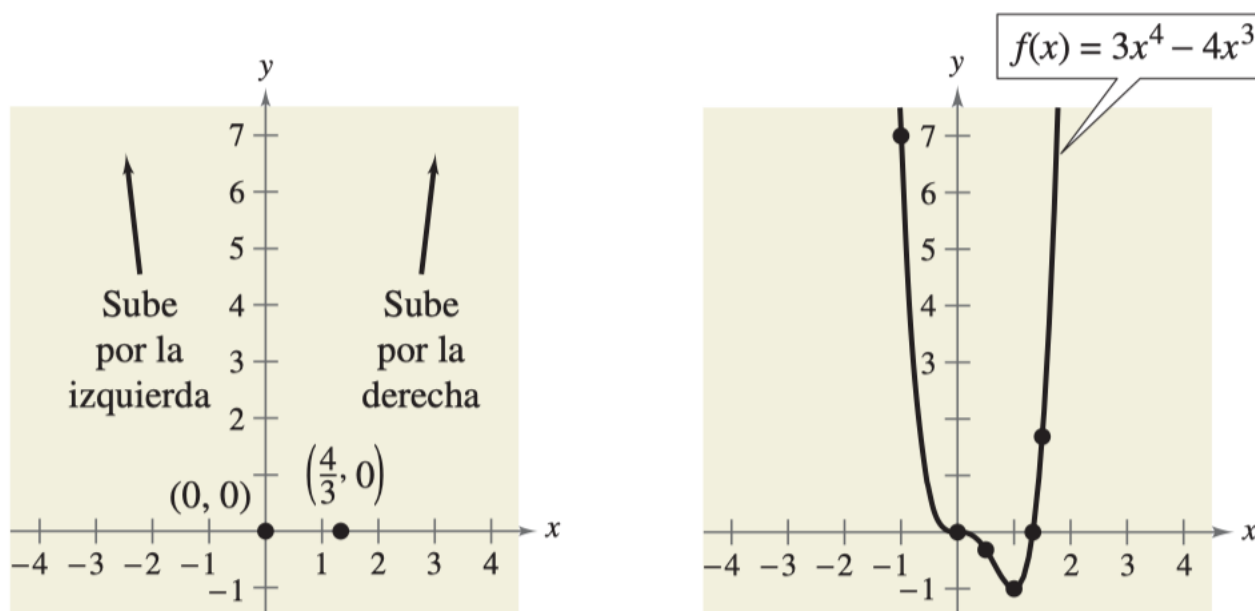


Figura tomada de Larson, R. Falvo, D. (2012). *Precálculo*. México: Cengage Learning Editores. Octava edición

## TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO

El siguiente teorema, llamado teorema del valor intermedio, ilustra la existencia de ceros reales de funciones polinomiales. Este teorema implica que si  $(a, f(a))$  y  $(b, f(b))$  son dos puntos en la gráfica de una función polinomial tal que  $f(a) \neq f(b)$ , entonces para cualquier número  $d$  entre  $f(a)$  y  $f(b)$  debe haber un número  $c$  entre  $a$  y  $b$  tal que  $f(c) = d$ .

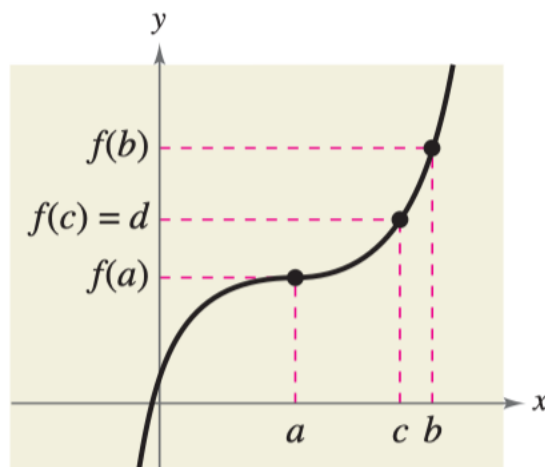


Figura tomada de Larson, R. Falvo, D. (2012). *Precálculo*. México: Cengage Learning Editores. Octava edición

### Aproximar un cero de una función polinomial

Use el teorema de valor intermedio para calcular el cero real de  $f(x) = x^3 - x^2 + 1$ .

Empiece por calcular algunos valores de la función, como sigue.

| $x$ | $f(x)$ |
|-----|--------|
| -2  | -11    |
| -1  | -1     |
| 0   | 1      |
| 1   | 1      |

Figura tomada de Larson, R. Falvo, D. (2012). *Precálculo*. México: Cengage Learning Editores. Octava edición

Como  $f(-1)$  es negativa y  $f(0)$  es positiva, se puede aplicar el teorema del valor intermedio para concluir que la función tiene un cero entre -1 y 0. Para localizar este cero con más precisión, divida el intervalo  $[-1, 0]$  en décimos y evalúe la función en cada punto. Cuando haga esto, encontrará que  $f(-0.8) = -0.152$  y  $f(-0.7) = 0.167$ .

Por tanto,  $f$  debe tener un cero entre -0.8 y -0.7, como se muestra en la figura siguiente. Para una aproximación más precisa, calcule valores de función entre  $f(-0.8)$  y  $f(-0.7)$  y aplique de nuevo el teorema del valor intermedio. Al continuar este proceso, puede calcular este cero a cualquier precisión deseada.

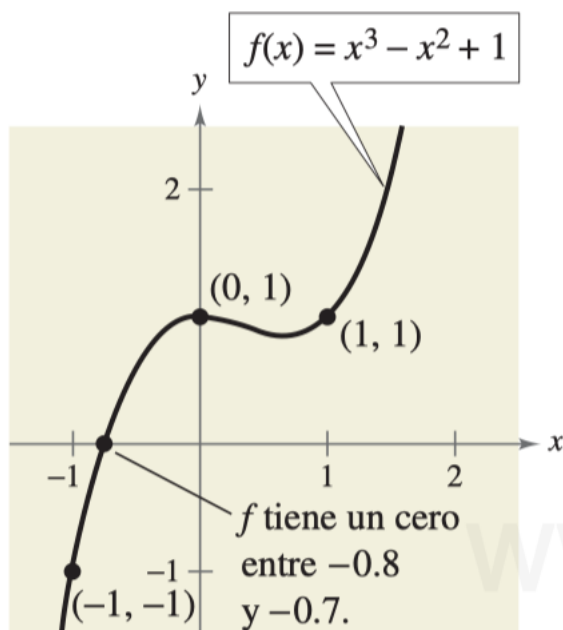


Figura tomada de Larson, R. Falvo, D. (2012). *Precálculo*. México: Cengage Learning Editores. Octava edición

## Actividad 2.4

1. Resuelve correctamente cada uno de los siguientes ejercicios que se presentan.
  2. La solución se tiene que hacer en hojas en blanco o en la libreta, ya que algunas soluciones llevan procesos algebraicos necesarios para llegar a la respuesta correcta. Los ejercicios en donde sean gráficos puedes recortarlos (siempre y cuando la parte de atrás no sea parte de otro gráfico) o dibujarlos en tu libreta.
- I. En los ejercicios siguientes describe el comportamiento a la derecha e izquierda de la gráfica de la función polinomial.
1.  $f(x) = \frac{1}{5}x^3 + 4x$
  2.  $f(t) = -\frac{3}{4}(t^2 - 3t + 6)$
  3.  $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$
  4.  $f(x) = 1 - x^6$
  5.  $f(x) = 4x^5 - 7x + 6.5$
- II. En los siguientes ejercicios, traza la gráfica de la función al (a) aplica la prueba del coeficiente principal, (b) halla los ceros del polinomio, (c) localiza suficientes puntos de solución y (d) traza una curva continua que pasa por los puntos.



1.  $f(x) = x^3 - 25x$
2.  $f(t) = \frac{1}{4}(t^2 - 2t - 15)$
3.  $f(x) = x^4 - 9x^2$
4.  $f(x) = 8 - x^3$
5.  $f(x) = -48x^2 + 3x^4$

III. Determina una función polinomial que tenga los ceros dados. Considere  $k = 1$ .

1. 0, 8
2. 0, -4, -5
3. 0, 1, 10
4. -2, -1, 0, 1, 2
5. 0, -7

### **Evaluación**

- Esta actividad será evaluada con el instrumento de evaluación 10





## Actividad 5

- **Aprendizaje Esperado:** Construye modelos gráfico, algebraico y numérico de funciones polinomiales favoreciendo el trabajo colaborativo en los problemas de su entorno.
- **Atributo (s):** 1.1 Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades / 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
- **Conocimiento (s):** Teoremas del factor y división sintética. Tratamiento visual de máximos y mínimos.

### DIVISIÓN SINTÉTICA

Hay un práctico atajo para la división larga de polinomios entre divisores de la forma  $x - k$ . Este atajo se llama división sintética. La forma para la división sintética de un polinomio cúbico se resume como sigue. (La forma para polinomios de grado superior es similar.)

#### División sintética (para un polinomio cúbico)

Para dividir  $ax^3 + bx^2 + cx + d$  entre  $x - k$ , use la siguiente forma.

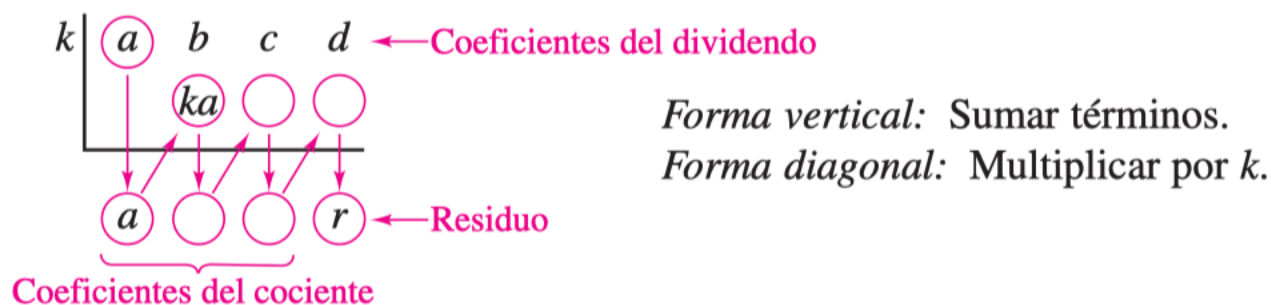


Figura tomada de Larson, R. Falvo, D. (2012). *Precálculo*. México: Cengage Learning Editores. Octava edición

Este algoritmo de la división sintética funciona sólo para divisores de la forma  $x - k$ . Recuerde que  $x + k = x - (-k)$ .

#### Ejemplo 1

Use división sintética para dividir  $x^4 - 10x^2 - 2x + 4$  entre  $x + 3$ .

Se debe escribir el arreglo como sigue. Observe que está incluido un cero por el término  $x^3$  faltante en el dividendo.

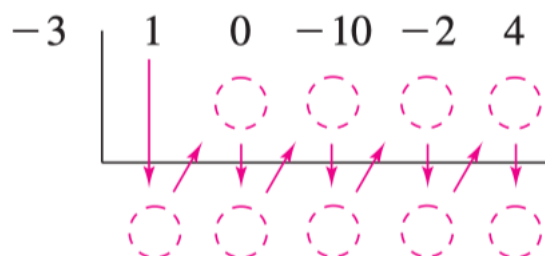


Figura tomada de Larson, R. Falvo, D. (2012). *Precálculo*. México: Cengage Learning Editores. Octava edición

A continuación, use la forma de la división sintética sumando términos en columnas y multiplicando por -3 los resultados.

Divisor:  $x + 3$       Dividendo:  $x^4 - 10x^2 - 2x + 4$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 -3 & 1 & 0 & -10 & -2 & 4 \\
 & & -3 & 9 & 3 & -3 \\
 \hline
 & 1 & -3 & -1 & 1 & (1)
 \end{array}$$

← Residuo: 1

Cociente:  $x^3 - 3x^2 - x + 1$

Figura tomada de Larson, R. Falvo, D. (2012) *Precálculo*, Octava Edición, Cengage Learning Editores.

Por tanto, tenemos

$$\frac{x^4 - 10x^2 - 2x + 4}{x + 3} = x^3 - 3x^2 - x + 1 + \frac{1}{x + 3}$$

## TEOREMAS DEL RESIDUO Y DEL FACTOR

El residuo obtenido en el proceso de división sintética tiene una interpretación importante, como se describe en el teorema del residuo.

### Teorema del residuo

Si un polinomio  $f(x)$  se divide entre  $x - k$ , el residuo es  $r = f(k)$ .

El teorema del residuo indica que la división sintética se puede usar para evaluar una función polinomial. Esto es, para evaluar una función polinomial  $f(x)$  cuando  $x - k$ , divida  $f(x)$  entre  $x - k$ . El residuo será  $f(k)$ .



Use el teorema del residuo para evaluar la siguiente función en  $x = -2$ .

$$f(x) = 3x^3 + 8x^2 + 5x - 7$$

Usando división sintética, se obtiene lo siguiente.

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 3 & 8 & 5 & -7 \\ & & -6 & -4 & -2 \\ \hline & 3 & 2 & 1 & -9 \end{array}$$

Figura tomada de Larson, R. Falvo, D. (2012). *Precálculo*. México: Cengage Learning Editores. Octava edición

Como el residuo es  $r = -9$ , se puede concluir que  $f(-2) = -9$ .

Esto significa que  $(-2, -9)$  es un punto en la gráfica de  $f$ . Se puede verificar esto al sustituir  $x = -2$  en la función original.

Comprobación

$$f(-2) = 3(-2)^3 + 8(-2)^2 + 5(-2) - 7 = 3(-8) + 8(4) - 10 - 7 = -9$$

Otro importante teorema es el teorema del factor, que se expresa a continuación. Este teorema indica que se puede probar para ver si un polinomio tiene  $(x - k)$  como factor al evaluar el polinomio en  $x - k$ . Si el resultado es 0,  $(x - k)$  es un factor.

Un polinomio  $f(x)$  tiene un factor  $(x - k)$  si y sólo si  $f(k) = 0$ .

### TEOREMA DE LOS CEROS RACIONALES

Todo cero racional del polinomio  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$  es de la forma  $\frac{p}{q}$ , en su forma más simple o reducida, donde  $p$  es un factor o divisor de  $a_0$  (Término independiente) y  $q$  es un factor o divisor de  $a_n$  (coeficiente principal)

Dicho teorema provee una herramienta para hacer un listado de todos los posibles ceros racionales de un polinomio con coeficientes enteros.

No necesariamente todos los números en el listado serán ceros del polinomio, pero todos los ceros racionales del polinomio estarán en el listado.



## Ejemplo 2

Hállense todos los posibles ceros racionales del polinomio  $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + x - 9$ .

Solución.

$a_0 = -9$ , por tanto  $p$  consta de los divisores de  $-9 : \pm 1, \pm 3, \pm 9$

$a_n = 2$ , por tanto  $q$  consta de los divisores de  $2 : \pm 1, \pm 2$

Así que los posibles ceros racionales de  $f(x)$  son los de la forma  $\frac{p}{q}$  o sea que son:

$$\pm 1, \pm 3, \pm 9, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{9}{2}$$

Si  $f(x)$  posee ceros racionales deben ser los listados anteriormente.

## Ejemplo 3

Encuentre todos los ceros racionales de  $P(x) = 2x^3 - x^2 - 8x + 4$

Solución.

Como  $a_0 = 4$  y  $a_n = 2$ , los posibles ceros racionales son:  $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm \frac{1}{2}$

Se puede verificar que 2 es un cero real así:

$$\begin{array}{r|l} 2 & 2 \quad -1 \quad -8 \quad 4 \\ & 4 \quad 6 \quad -4 \\ \hline & 2 \quad 3 \quad -2 \quad 0 \end{array}$$

por tanto,  $P(x) = (x - 2)(2x^2 + 3x - 2)$

Los ceros de  $Q(x) = 2x^2 + 3x - 2$  se hallan resolviendo la ecuación cuadrática y son  $\frac{1}{2}$  y  $-2$ .

Así los ceros racionales de  $P(x)$  son:  $2, -2, \frac{1}{2}$ .

**Actividad 2.5**

1. Resuelve correctamente cada uno de los siguientes ejercicios que se presentan.
2. La solución se tiene que hacer en hojas en blanco o en la libreta, ya que algunas soluciones llevan procesos algebraicos necesarios para llegar a la respuesta correcta. Los ejercicios en donde sean gráficos puedes recortarlos (siempre y cuando la parte de atrás no sea parte de otro gráfico) o dibujarlos en tu libreta.

I. En los siguientes ejercicios emplea la división sintética.

1.  $(3x^3 - 17x^2 + 15x - 25) \div (x - 5)$

2.  $(-x^3 + 75x - 250) \div (x + 10)$

3. 
$$\frac{x^5 - 13x^4 - 120x + 80}{x + 3}$$

4. 
$$\frac{-3x^4}{x + 2}$$

5. 
$$\frac{3x^3 - 4x^2 + 5}{x - \frac{3}{2}}$$

II. En los siguientes ejercicios emplea el teorema del residuo y la división sintética para hallar el valor de cada función.

1.  $f(x) = 2x^3 - 7x + 3$ ; a)  $f(1)$  b)  $f(-2)$  c)  $f(1/2)$  d)  $f(2)$

2.  $g(x) = 2x^6 + 3x^4 - x^2 + 3$ ; a)  $g(2)$  b)  $g(1)$  c)  $g(3)$  d)  $g(-1)$

III. En los siguientes ejercicios a) verifica los factores dados de la función f, b) determina los factores restantes de f, c) usa tus resultados para escribir la factorización completa de f, d) haga una lista de los ceros reales de f.

1.  $f(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$ , factores  $(x + 2)$ ,  $(x - 1)$

2.  $f(x) = x^4 - 4x^3 - 15x^2 + 58x - 40$ , factores  $(x - 5)$ ,  $(x + 4)$

**Evaluación**

- Esta actividad será evaluada con el instrumento de evaluación 10



## VALORANDO MI AVANCE

Para concluir, contesta en tu libreta las siguientes preguntas con respecto de lo que aprendiste en este bloque:



- ¿Qué estoy aprendiendo?
- ¿En qué aprendizajes esperados aún tengo dificultades?
- ¿Qué acciones puedo realizar para mejorar mi desempeño?
- ¿Qué estrategias de estudio me han funcionado en este bloque?



## BLOQUE III. Funciones racionales

### Actividad 1

- **Aprendizaje Esperado:** Construye la gráfica y el modelo de funciones racionales de manera colaborativa representando fenómenos sociales o naturales de su contexto.
- **Atributo (s):** 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas/7.3 Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana
- **Conocimiento (s):** Modelo algebraico general de una función racional/modelo gráfico/Asíntotas.

#### Lectura previa

Lee con mucha atención el siguiente texto:

#### Función racional.

En alguna ocasión habrás utilizado fórmulas en física, como: la ley de coulomb  $F = \frac{q_1 q_2}{r^2}$ , la ley de la gravitación universal  $F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$  así como la ley de ohm  $I = \frac{V}{R}$  entre otras, una de las características de estas es: si la distancia al cuadrado es muy grande entonces la fuerza de atracción disminuye o por el contrario si la distancia al cuadrado es muy pequeña entonces hay una mayor fuerza de atracción, lo mismo sucede en la ley de ohm si la resistencia (R) es muy grande entonces la intensidad de corriente (I) será menor y por el contrario si la resistencia es muy pequeña entonces la (I) es mayor, vamos a comenzar el estudio de las funciones racionales, desde la definición hasta la elaboración gráfica y resolución de problemas, lo cual te permitirá conocer cómo están involucradas las variables en este tipo de funciones.

#### Definición de Función Racional

Una función racional se define como el cociente entre dos polinomios:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Donde:  $P(x)$  y  $Q(x)$  son funciones polinomiales y ambas no tienen factor común, además  $Q(x) \neq 0$



## IDENTIFICANDO FUNCIONES RACIONALES

1.  $f(x) = \frac{x-2}{2x-3}$

Es **una función racional** dado que el numerador y denominador son funciones polinomiales de primer grado y no tienen factor común.

2.  $g(x) = \frac{4x-3}{2}$

No es **una función racional** ya que el denominador es una función constante es decir un polinomio de grado cero.

3.  $h(x) = \frac{x^2}{1-x}$

Es **una función racional** dado que el numerador es un polinomio de segundo grado y el denominador un polinomio de primer grado.

4.  $f(x) = \frac{2}{x}$

Es **una función racional** dado que el numerador es una función polinomial de grado cero y el denominador una función polinomial de primer grado.

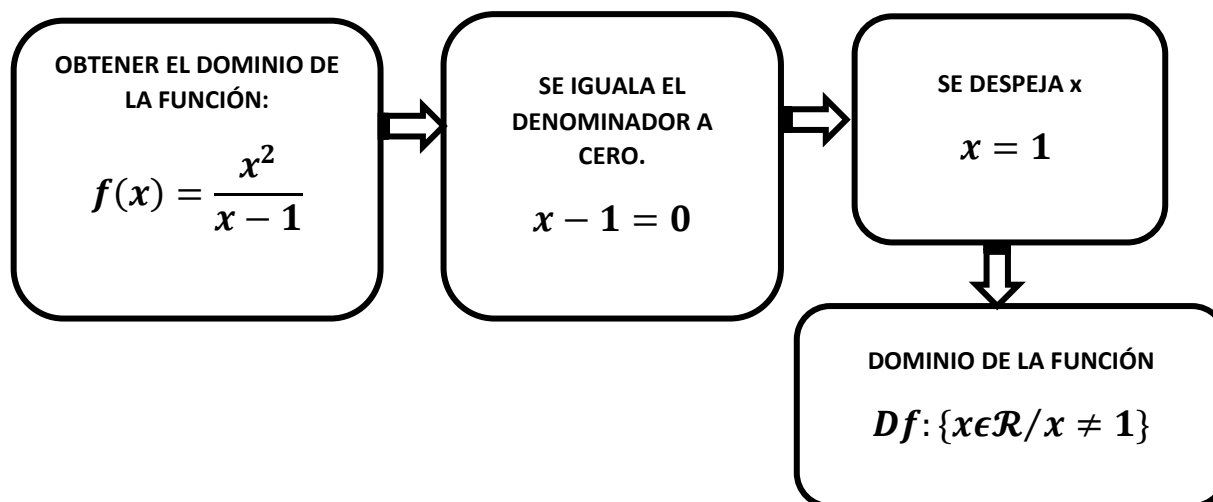




## DOMINIO DE LA FUNCIÓN RACIONAL

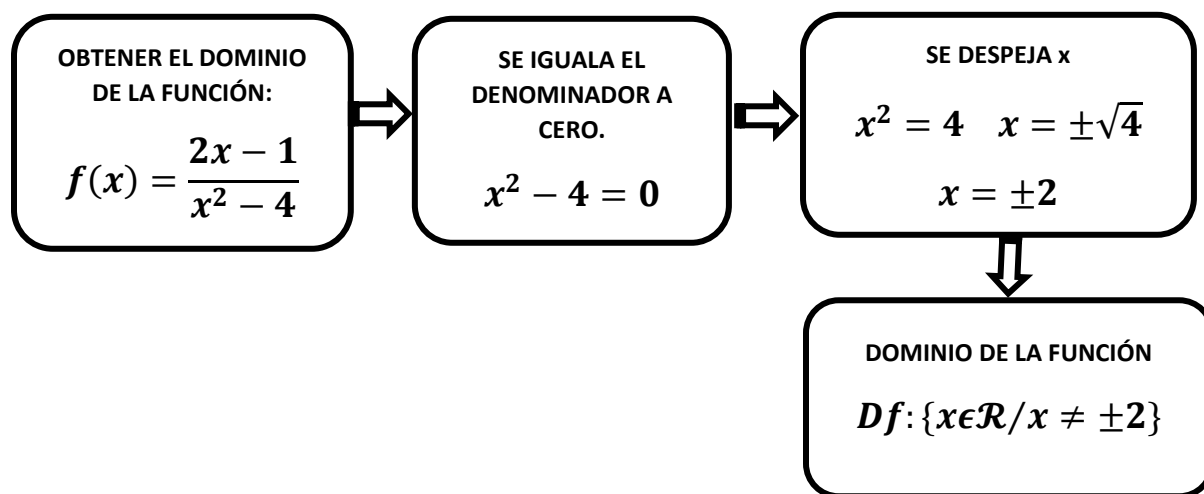
Como te has dado cuenta a lo largo de todos los bloques, es importante obtener el dominio de la función, en este caso de función racional, el dominio de la función son todos los números reales con excepción de aquellos que hacen al denominador cero. (ya que la división entre cero no existe).

### Ejemplo 1

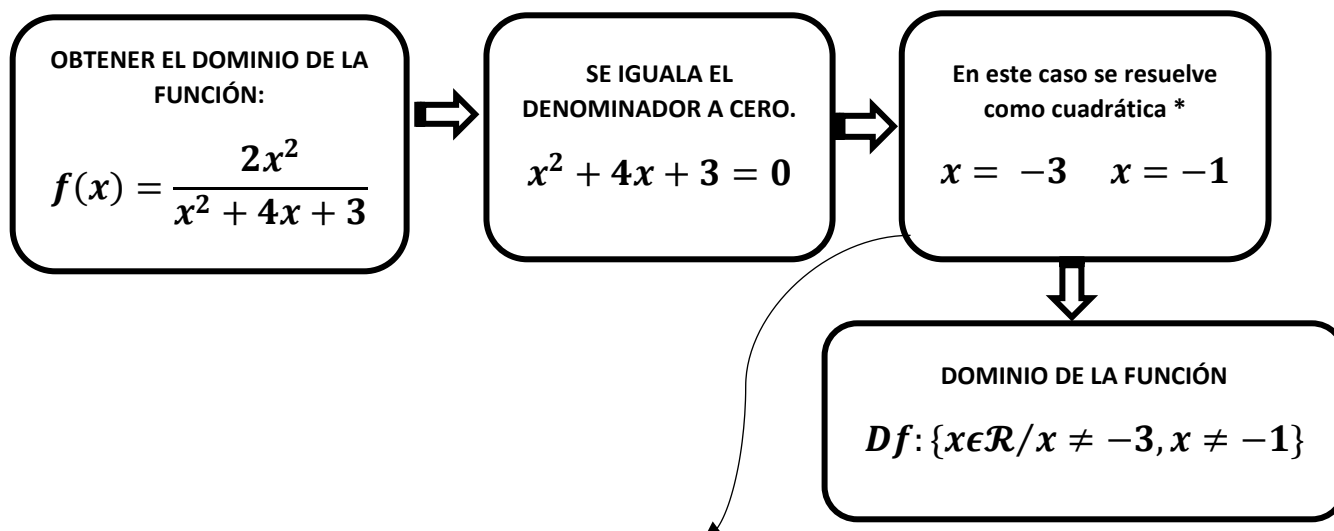


$Df: \{x \in \mathbb{R} / x \neq 1\}$  se lee como: el dominio de la función es el conjunto de todos los valores "x" que pertenecen al conjunto de los números reales ( $\mathbb{R}$ ) tal que x es diferente de 1, es decir puede ser cualquier número menos el 1, también puede ser escrito como  $Df: \mathbb{R} - \{1\}$

### Ejemplo 2



En este ejemplo son dos valores que no pertenecen al dominio: +2 y -2.

**Ejemplo 3**

\* Se puede resolver por factorización o por fórmula general

Aplicando factorización:

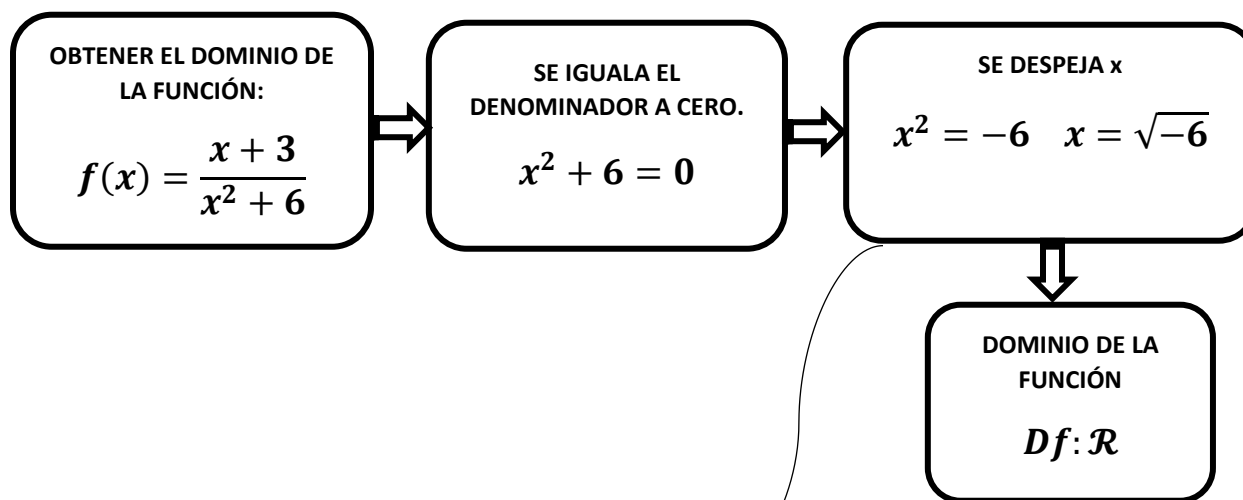
$x^2 + 4x + 3 = 0$  Dos números que multiplicados sea 3 y sumados 4,  $3 \cdot 1 = 3$  y  $3 + 1 = 4$  por lo tanto  $(x+3)(x+1)$   $x+3=0$   $x=-3$   $x+1=0$   $x=-1$

Aplicando fórmula general:  $a=1$   $b=4$   $c=3$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)(3)}}{2(1)} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2}$$

$$x_1 = \frac{-4 + 2}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$x_2 = \frac{-4 - 2}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

**Ejemplo 4**

Al despejar “x” da raíz cuadrada de un número negativo, por lo tanto, no existe y significa que el denominador en este ejemplo nunca va a ser cero, por lo que puede tomar cualquier valor del conjunto de los números reales.

**ASÍNTOTAS Y GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN RACIONAL**

Para realizar la gráfica de una función racional es importante tener en cuenta el dominio de la función, ya que ese valor excluido representa una recta vertical la cual se aproxima a la gráfica de la función y se denomina asíntota vertical. Tomando valores cercanos a la asíntota vertical se podrá construir la gráfica.

**Asíntota**

Una asíntota es una recta a la cual se aproxima la gráfica cuando crece indefinidamente

Es importante mencionar que en la función racional pueden existir tres tipos de asíntotas: Asíntota vertical, horizontal y oblicua de la siguiente manera:

- Una función racional puede tener o no asíntota vertical.
- Una función racional si tiene asíntota horizontal no tienen asíntota oblicua.
- Una función racional si no tienen asíntota horizontal entonces tiene asíntota oblicua.



## ASÍNTOTA VERTICAL

Para hallar la asíntota vertical de una función racional se iguala el denominador a cero se resuelve la ecuación y ese valor representa la asíntota vertical.

## ASÍNTOTA HORIZONTAL

Para hallar la asíntota horizontal, se determinarán de acuerdo su expresión algebraica. Partiendo de la definición de la función racional:

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + b_{m-2} x^{m-2} + \dots + b_1 x + b_0}$$

De acuerdo sus exponentes en el numerador y denominador tenemos que:

**Caso A.** Si  $n < m$ , entonces  $f(x)$  tienen una asíntota horizontal  $y=0$

**Caso B.** Si  $n = m$ , entonces la asíntota horizontal es  $y = \frac{a_n}{b_m}$  (División entre sus coeficientes)

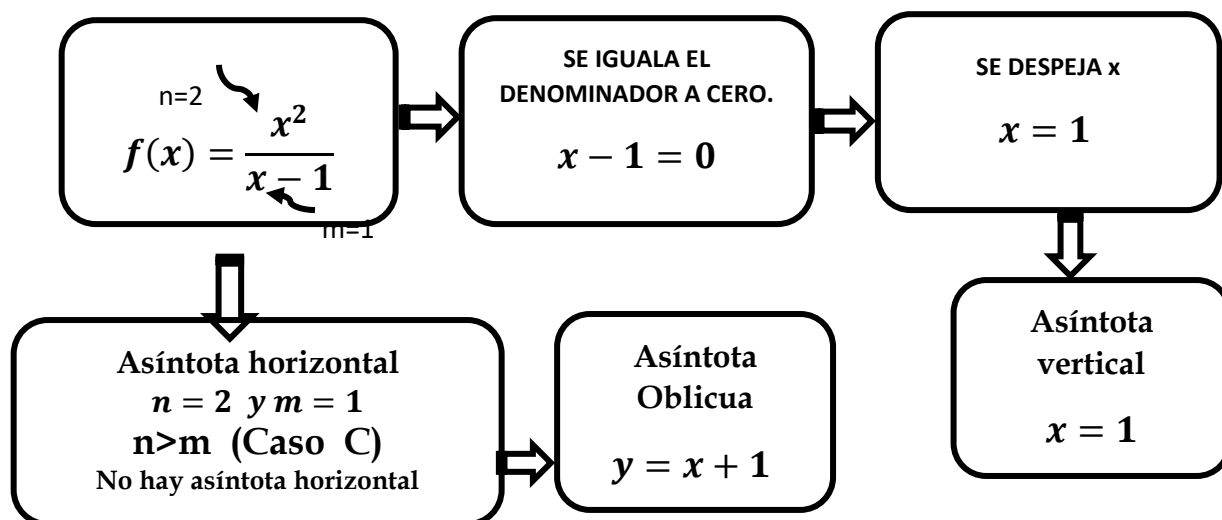
**Caso C.** Si  $n > m$ , entonces no tienen asíntota horizontal, tiene asíntota oblicua.

## ASÍNTOTA OBLICUA

Existe asíntota oblicua cuando el numerador es un grado mayor que el denominador. Cuya ecuación es de la forma  $y = mx + b$  y se obtienen al realizar la división entre los polinomios.

Hallar las asíntotas de los ejemplos anteriores:

### Ejemplo 1





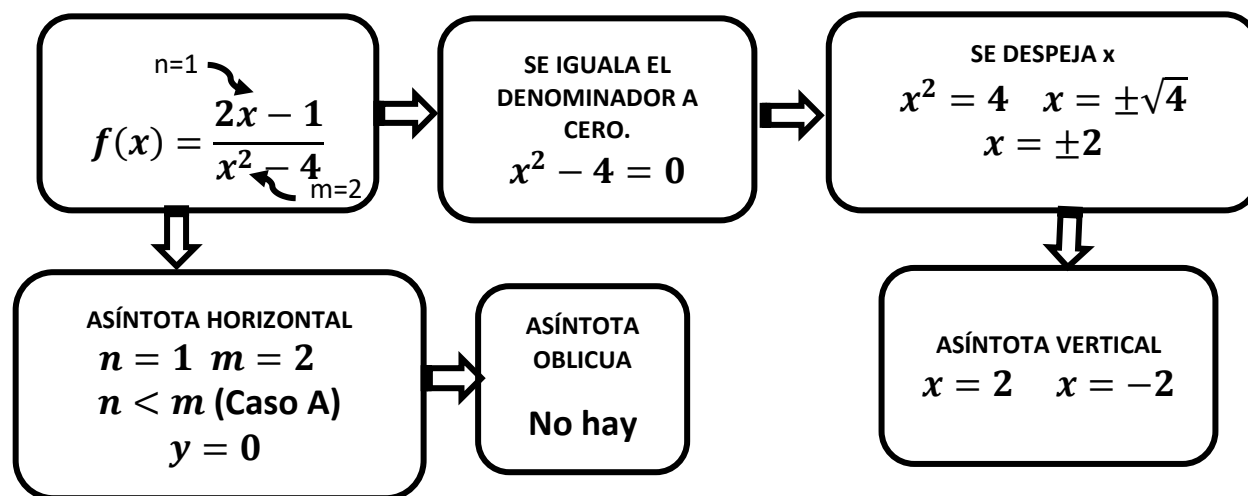
Se realiza la división y se obtiene la **asíntota oblicua**. (también la puedes realizar utilizando división sintética)

$$\begin{array}{r}
 x \quad + \quad 1 \\
 x-1 \overline{) \begin{array}{r} x^2 \\ -x^2 \quad +x \\ \hline +x \\ -x \quad +1 \\ \hline 1 \end{array}} \\
 \hline
 \end{array}$$

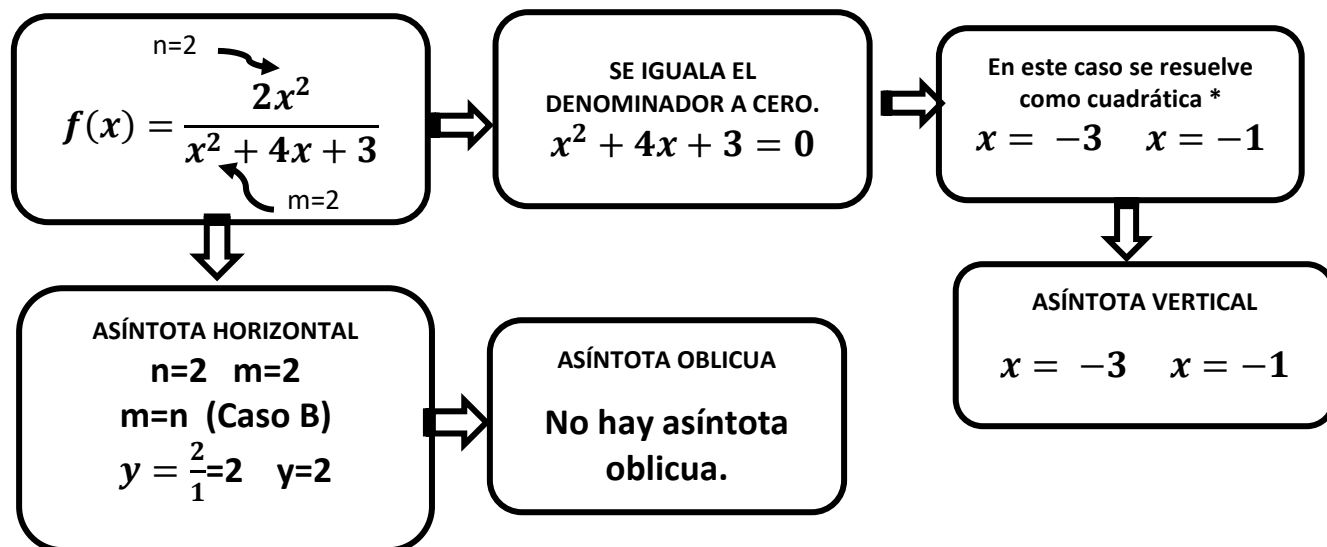
Asíntota oblicua  $y = x + 1$

El cociente es la asíntota oblicua  $y = x + 1$

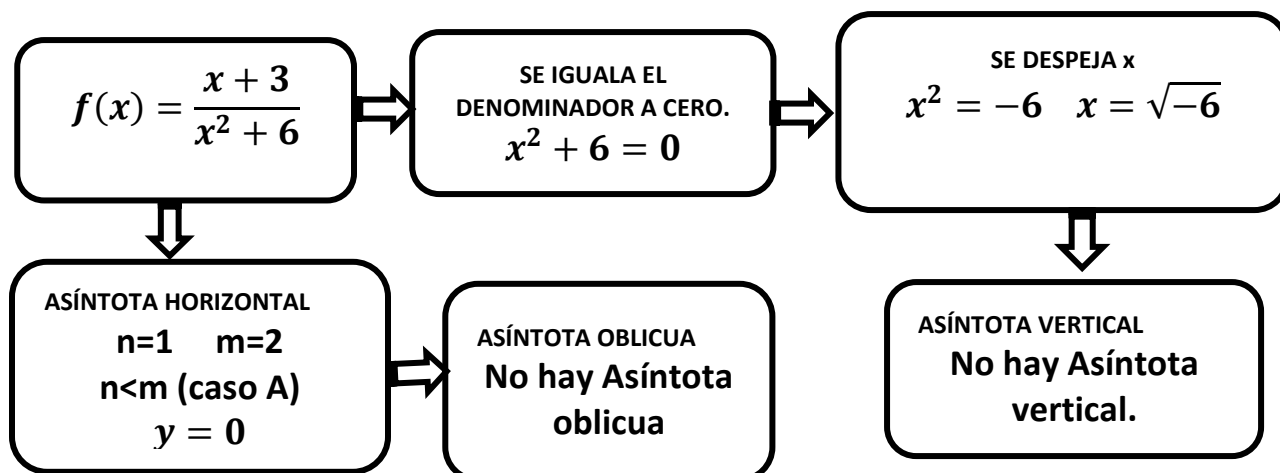
## Ejemplo 2



En este ejemplo hay dos asíntotas verticales  $x=2$  y  $x=-2$ , tiene asíntota horizontal  $y=0$  y no hay asíntota oblicua.

**Ejemplo 3**

En este caso los exponentes son iguales, ya que la función polinomial tanto del numerador como del denominador son cuadráticas, por lo tanto, la asíntota horizontal es la división entre los coeficientes de los términos cuadráticos.

**Ejemplo 4**

Hasta aquí tenemos dos elementos: *el dominio* y *las asíntotas* muy importantes para la elaboración de las gráficas de funciones racionales, un elemento indispensable también para la elaboración de las gráficas son las intersecciones con los ejes.



## INTERSECCIONES CON LOS EJES Y GRÁFICA

Obtener las intersecciones con los ejes es una herramienta de gran ayuda al momento de graficar una función, para hallar las intersecciones hacemos  $x = 0$  y  $y = 0$

Hallar las intersecciones de los 4 ejemplos anteriores:

### Ejemplo 1

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1}$$

$$x = 0 \quad y = \frac{0^2}{0-1} = \frac{0}{-1} = 0 \quad \text{la intersección es: } (0,0)$$

NOTA: SÓLO TIENE UNA INTERSECCIÓN Y ES EL ORIGEN.

### Resumen de los datos obtenidos del EJEMPLO 1

| FUNCIÓN                  | DOMINIO                               | ASÍNTOTAS                                     | INTERSECCIONES | POSIBLES VALORES                                                                                                                                                                                                                                             |   |      |      |  |   |  |     |  |   |  |     |  |   |  |     |  |
|--------------------------|---------------------------------------|-----------------------------------------------|----------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|------|------|--|---|--|-----|--|---|--|-----|--|---|--|-----|--|
| $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ | $Df: \{x \in \mathbb{R} / x \neq 1\}$ | A.V. $x=1$<br>A.H. no tiene<br>A.O. $y = x+1$ | (0,0)          | <table><tr><th>x</th><th>f(x)</th></tr><tr><td>-0.5</td><td></td></tr><tr><td>0</td><td></td></tr><tr><td>0.5</td><td></td></tr><tr><td>1</td><td></td></tr><tr><td>1.5</td><td></td></tr><tr><td>2</td><td></td></tr><tr><td>2.5</td><td></td></tr></table> | x | f(x) | -0.5 |  | 0 |  | 0.5 |  | 1 |  | 1.5 |  | 2 |  | 2.5 |  |
| x                        | f(x)                                  |                                               |                |                                                                                                                                                                                                                                                              |   |      |      |  |   |  |     |  |   |  |     |  |   |  |     |  |
| -0.5                     |                                       |                                               |                |                                                                                                                                                                                                                                                              |   |      |      |  |   |  |     |  |   |  |     |  |   |  |     |  |
| 0                        |                                       |                                               |                |                                                                                                                                                                                                                                                              |   |      |      |  |   |  |     |  |   |  |     |  |   |  |     |  |
| 0.5                      |                                       |                                               |                |                                                                                                                                                                                                                                                              |   |      |      |  |   |  |     |  |   |  |     |  |   |  |     |  |
| 1                        |                                       |                                               |                |                                                                                                                                                                                                                                                              |   |      |      |  |   |  |     |  |   |  |     |  |   |  |     |  |
| 1.5                      |                                       |                                               |                |                                                                                                                                                                                                                                                              |   |      |      |  |   |  |     |  |   |  |     |  |   |  |     |  |
| 2                        |                                       |                                               |                |                                                                                                                                                                                                                                                              |   |      |      |  |   |  |     |  |   |  |     |  |   |  |     |  |
| 2.5                      |                                       |                                               |                |                                                                                                                                                                                                                                                              |   |      |      |  |   |  |     |  |   |  |     |  |   |  |     |  |

**Nota:**

- a) La asíntota oblicua se puede graficar dando dos valores a x, ya que es una recta:  $y=x+1$

| x | y |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |





- b) En la tabulación de los posibles valores, estos se toman cercanos al valor que está excluido en este caso  $x=1$  marcado con rojo.

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1}$$

| x    | f(x)   |
|------|--------|
| -0.5 | -0.166 |
| 0    | 0      |
| 0.5  | -0.5   |
| 1.5  | 4.5    |
| 2    | 4      |
| 2.5  | 4.166  |

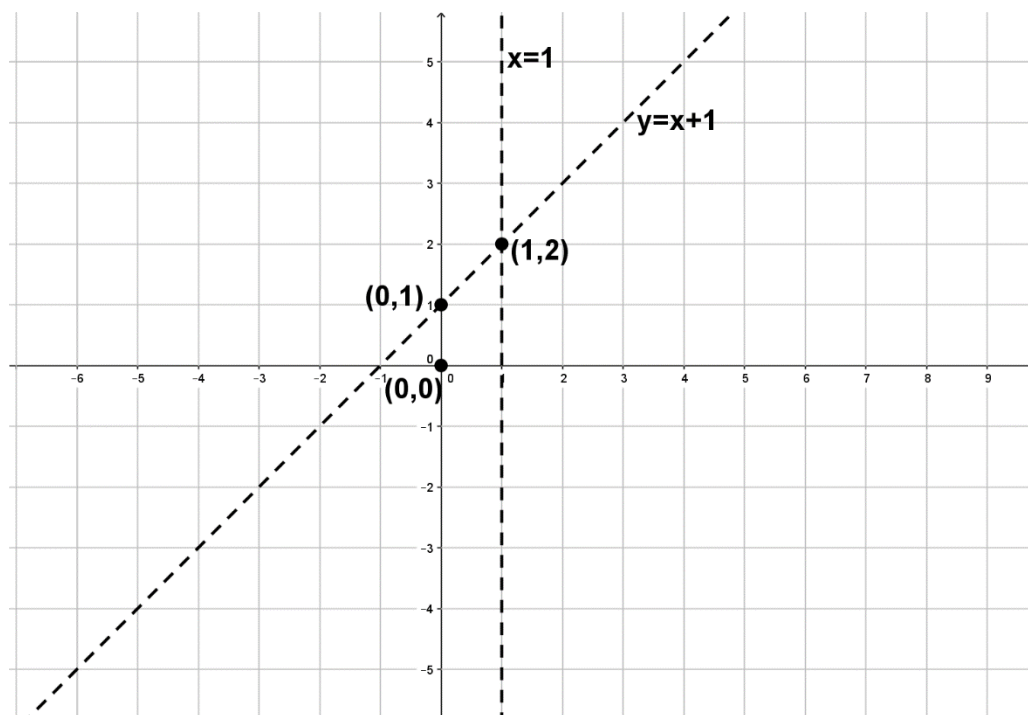
Para obtener los valores de  $f(x)$  se sustituye el valor de  $x$  en la función.

$$f(x) = \frac{(-0.5)^2}{(-0.5) - 1} = \frac{0.25}{-1.5} = -\frac{1}{6} = -0.1666$$

Se sustituyen los otros valores y de esta manera se obtiene la tabla anterior.

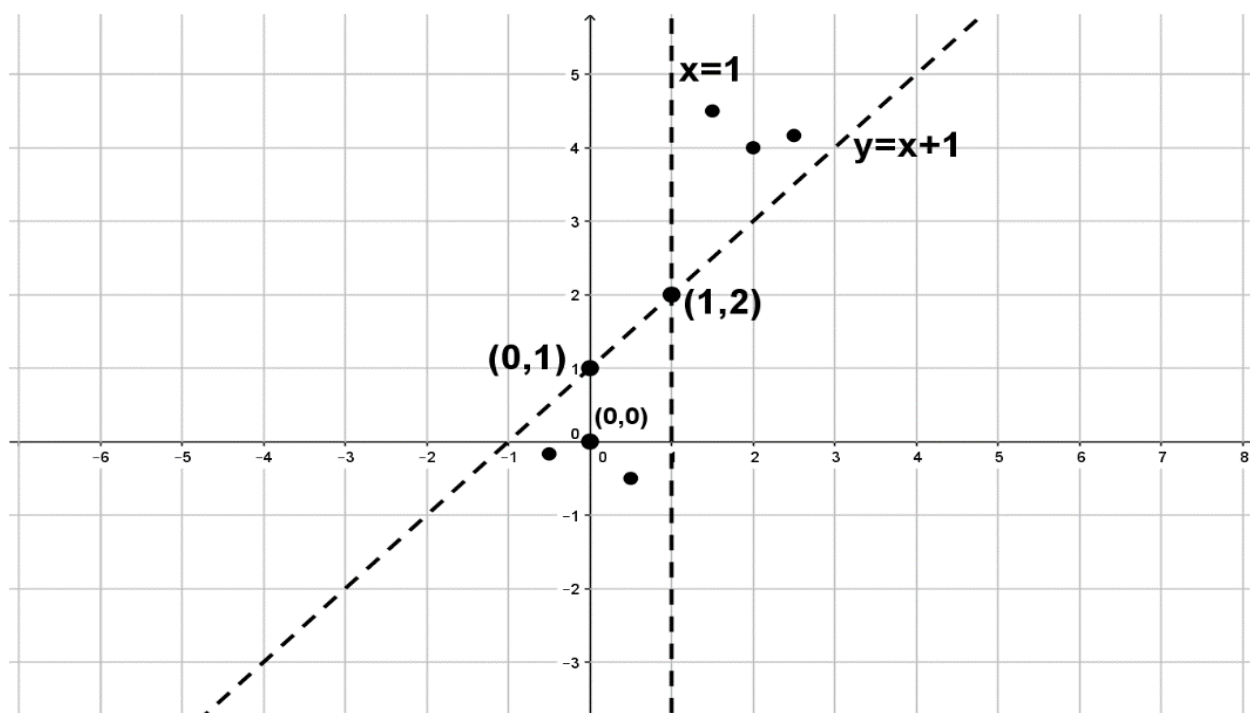
### GRÁFICA DE LA FUNCIÓN

- 1.- Localiza las intersección y gráfica las asíntotas. (Asíntota vertical  $x=1$  asíntota oblicua  $y=x+1$ )

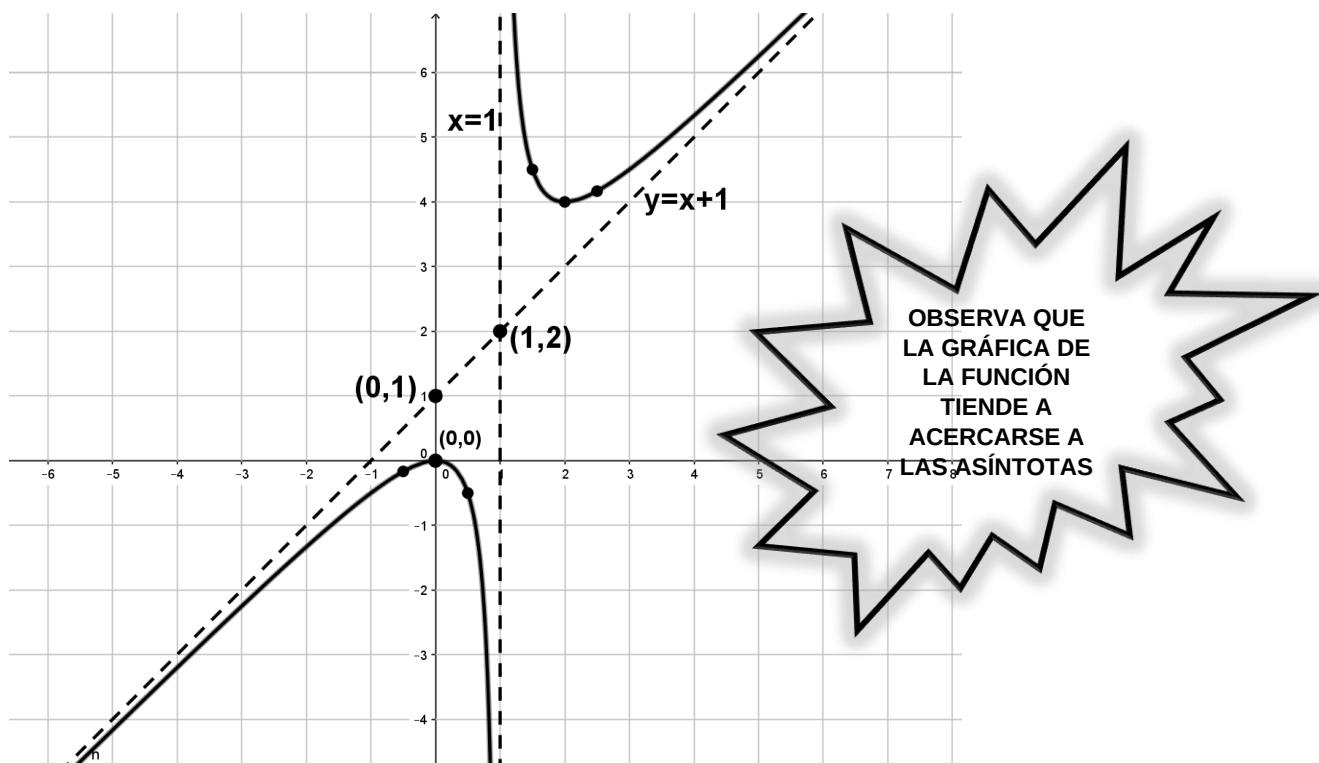




## 2.- Localizar los puntos de la tabulación.



## 3.- Bosquejar la gráfica uniendo los puntos localizados.





## Ejemplo 2

$$f(x) = \frac{2x - 1}{x^2 - 4}$$

Intersecciones:

$$x = 0 \quad y = \frac{2(0) - 1}{0^2 - 4} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4} = 0.25 \quad \text{intersección } (0, 0.25)$$

$$y = 0 \quad 0 = \frac{2x - 1}{x^2 - 4} \quad \text{al multiplicar es cero} \quad \overbrace{0(x^2 - 4)} = 2x - 1 \quad 0 = 2x - 1 \quad \text{ó}$$

$$2x - 1 = 0 \quad \text{despejando } x \quad 2x = 1 \quad x = \frac{1}{2} = 0.5 \quad \text{intersección } (0.5, 0)$$

### Resumen de los datos obtenidos del EJEMPLO 2

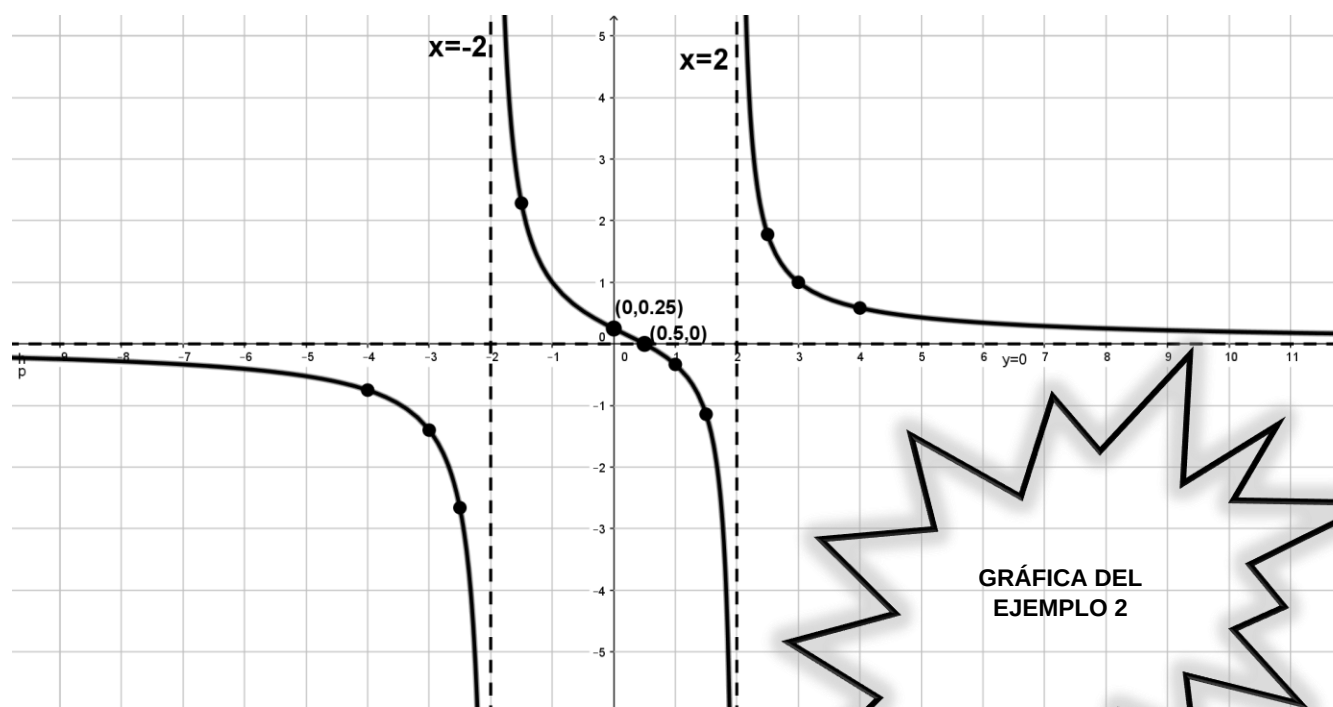
| FUNCIÓN                         | DOMINIO                                   | ASÍNTOTAS                                | INTERSECCIONES      | POSIBLES VALORES |      |
|---------------------------------|-------------------------------------------|------------------------------------------|---------------------|------------------|------|
| $f(x) = \frac{2x - 1}{x^2 - 4}$ | $Df: \{x \in \mathbb{R} / x \neq \pm 2\}$ | A.V. x=2 x=-2<br>A.H y=0<br>A.O no tiene | (0,0.25)<br>(0.5,0) | x                | f(x) |
|                                 |                                           |                                          |                     | -4               |      |
|                                 |                                           |                                          |                     | -3               |      |
|                                 |                                           |                                          |                     | -2.5             |      |
|                                 |                                           |                                          |                     | -2               |      |
|                                 |                                           |                                          |                     | -1.5             |      |
|                                 |                                           |                                          |                     | -1               |      |
|                                 |                                           |                                          |                     | 0                |      |
|                                 |                                           |                                          |                     | 1                |      |
|                                 |                                           |                                          |                     | 1.5              |      |
|                                 |                                           |                                          |                     | 2                |      |
|                                 |                                           |                                          |                     | 2.5              |      |
|                                 |                                           |                                          |                     | 3                |      |
|                                 |                                           |                                          |                     | 4                |      |



Sustituyendo los valores de  $x$  en la función se elabora la tabla, quedando de la siguiente manera:

| $x$  | $f(x)$ |
|------|--------|
| -4   | -0.75  |
| -3   | -1.4   |
| -2.5 | -2.66  |
| -1.5 | 2.285  |
| -1   | 1      |
| 0    | 0.25   |
| 1    | -0.333 |
| 1.5  | -1.142 |
| 2.5  | 1.777  |
| 3    | 1      |
| 4    | 0.583  |

Se localizan las asíntotas vertical  $x=2$  y  $x=-2$  (líneas punteadas) y la asíntota horizontal  $y=0$  (recta punteada la cual coincide con el eje  $x$ ), las intersecciones  $(0, 0.25)$  y  $(0.5, 0)$ , se localizan los puntos de la tabulación. posteriormente se unen los puntos bosquejando la gráfica.





## Ejemplo 3

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 4x + 3}$$

Intersecciones:

$$x = 0 \quad y = \frac{2(0)^2}{(0)^2 + 4(0) + 3} = \frac{0}{3} = 0 \quad \text{intersección (0,0)}$$

Resumen de los datos obtenidos del EJEMPLO 3

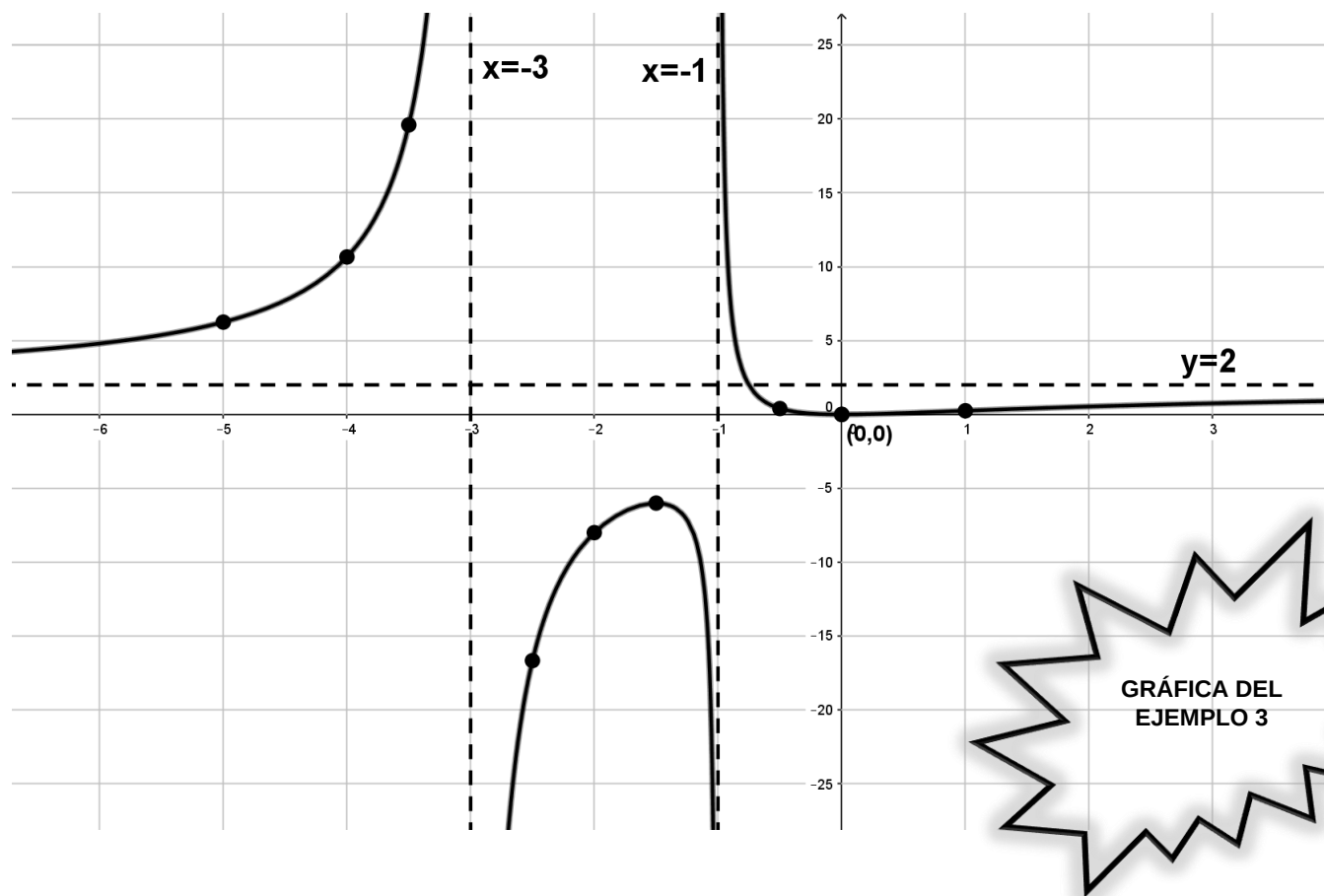
| FUNCIÓN                            | DOMINIO                                           | ASÍNTOTAS                                             | INTERSECCIONES | POSIBLES VALORES |      |
|------------------------------------|---------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|----------------|------------------|------|
| $f(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 4x + 3}$ | $Df: \{x \in \mathbb{R} / x \neq -3, x \neq -1\}$ | A.V. $x=-3 \quad x=-1$<br>A.H. $y=2$<br>A.O. no tiene | (0,0)          | x                | f(x) |
|                                    |                                                   |                                                       |                | -5               |      |
|                                    |                                                   |                                                       |                | -4               |      |
|                                    |                                                   |                                                       |                | -3.5             |      |
|                                    |                                                   |                                                       |                | -3               |      |
|                                    |                                                   |                                                       |                | -2.5             |      |
|                                    |                                                   |                                                       |                | -2               |      |
|                                    |                                                   |                                                       |                | -1.5             |      |
|                                    |                                                   |                                                       |                | -1               |      |
|                                    |                                                   |                                                       |                | -0.5             |      |
|                                    |                                                   |                                                       |                | 0                |      |
|                                    |                                                   |                                                       |                | 1                |      |

Sustituyendo los valores de x en la función se elabora la tabla, quedando de la siguiente manera:

| x    | f(x)   |
|------|--------|
| -5   | 6.25   |
| -4   | 10.66  |
| -3.5 | 19.6   |
| -2.5 | -16.66 |
| -2   | -8     |
| -1.5 | -6     |
| -0.5 | 0.4    |
| 0    | 0      |
| 1    | 0.25   |



Se localizan las asíntotas  $x=-3$ ,  $x=-1$ ,  $y=2$  (líneas punteadas), la intersección  $(0,0)$ , los puntos de la tabulación y se bosqueja la gráfica



#### Ejemplo 4

$$f(x) = \frac{x+3}{x^2+6}$$

Intersecciones:

$$x = 0 \quad y = \frac{0+3}{(0)^2+6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0.5 \quad \text{intersección } (0, 0.5)$$

$$y = 0 \quad 0 = \frac{x+3}{x^2+6} \quad \text{al multiplicar es cero} \quad \overbrace{0(x^2+6)} = x+3$$

$$0 = x+3 \quad \text{o bien} \quad x+3 = 0$$

$$x = -3 \quad \text{intersección } (-3, 0)$$



**Resumen de los datos obtenidos del EJEMPLO 4**

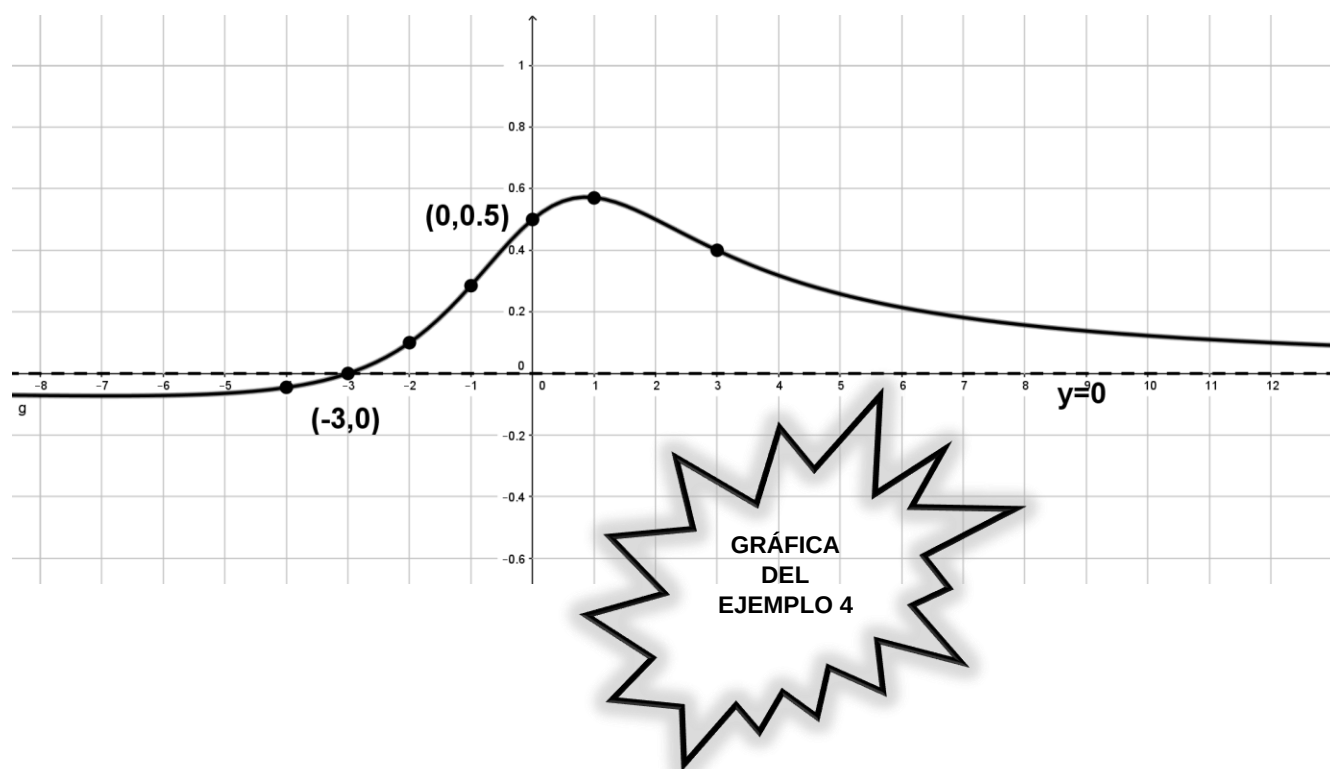
| FUNCIÓN                        | DOMINIO           | ASÍNTOTAS                              | INTERSECCIONES    | POSIBLES VALORES                                                                                                                                                                                                                                                                                                |      |      |    |  |    |  |    |  |    |  |   |  |   |  |   |  |   |  |   |  |
|--------------------------------|-------------------|----------------------------------------|-------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|------|----|--|----|--|----|--|----|--|---|--|---|--|---|--|---|--|---|--|
| $f(x) = \frac{x + 3}{x^2 + 6}$ | $Df: \mathcal{R}$ | A.V. no hay<br>A.H y=0<br>A.O no tiene | (0,0.5)<br>(-3,0) | <table><tr><th>x</th><th>f(x)</th></tr><tr><td>-4</td><td></td></tr><tr><td>-3</td><td></td></tr><tr><td>-2</td><td></td></tr><tr><td>-1</td><td></td></tr><tr><td>0</td><td></td></tr><tr><td>1</td><td></td></tr><tr><td>2</td><td></td></tr><tr><td>3</td><td></td></tr><tr><td>0</td><td></td></tr></table> | x    | f(x) | -4 |  | -3 |  | -2 |  | -1 |  | 0 |  | 1 |  | 2 |  | 3 |  | 0 |  |
|                                |                   |                                        |                   | x                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | f(x) |      |    |  |    |  |    |  |    |  |   |  |   |  |   |  |   |  |   |  |
|                                |                   |                                        |                   | -4                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |      |      |    |  |    |  |    |  |    |  |   |  |   |  |   |  |   |  |   |  |
|                                |                   |                                        |                   | -3                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |      |      |    |  |    |  |    |  |    |  |   |  |   |  |   |  |   |  |   |  |
|                                |                   |                                        |                   | -2                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |      |      |    |  |    |  |    |  |    |  |   |  |   |  |   |  |   |  |   |  |
|                                |                   |                                        |                   | -1                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |      |      |    |  |    |  |    |  |    |  |   |  |   |  |   |  |   |  |   |  |
|                                |                   |                                        |                   | 0                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |      |      |    |  |    |  |    |  |    |  |   |  |   |  |   |  |   |  |   |  |
|                                |                   |                                        |                   | 1                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |      |      |    |  |    |  |    |  |    |  |   |  |   |  |   |  |   |  |   |  |
|                                |                   |                                        |                   | 2                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |      |      |    |  |    |  |    |  |    |  |   |  |   |  |   |  |   |  |   |  |
|                                |                   |                                        |                   | 3                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |      |      |    |  |    |  |    |  |    |  |   |  |   |  |   |  |   |  |   |  |
|                                |                   |                                        |                   | 0                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |      |      |    |  |    |  |    |  |    |  |   |  |   |  |   |  |   |  |   |  |

No existe asíntota vertical por lo tanto el valor para x puede ser cualquier número real. Se sustituyen los valores en la función y se elabora la tabla.

| x  | f(x)   |
|----|--------|
| -4 | -0.045 |
| -3 | 0      |
| -2 | 0.1    |
| -1 | 0.285  |
| 0  | 0.5    |
| 1  | 0.571  |
| 2  | 0.5    |
| 3  | 0.4    |



Se grafica la asíntota horizontal  $y=0$  (recta punteada coincide con el eje  $x$ ), la intersección  $(-3,0)$   $(0,0.5)$ , se localizan los puntos de la tabla, se bosqueja la gráfica:



Te habrás dado cuenta que las gráficas de las funciones elaboradas nunca cortarán a la asíntota vertical.

### Actividad 1

#### Instrucciones

1.- Graficar las siguientes funciones racionales:

|                             |                              |                               |
|-----------------------------|------------------------------|-------------------------------|
| $a) f(x) = \frac{x+3}{x-6}$ | $b) f(x) = \frac{3x}{x^2-9}$ | $c) f(x) = \frac{x^2+x-6}{x}$ |
|-----------------------------|------------------------------|-------------------------------|

2.- Realiza en tu cuaderno todo el procedimiento, obteniendo, dominio de la función, asíntotas (vertical, horizontal, oblicua), intersecciones y tabulación de cada una de las funciones graficar.

**3.- Resume los datos obtenidos en una tabla:**

| FUNCIÓN | DOMINIO | ASÍNTOTAS          | INTERSECCIONES | POSIBLES VALORES |
|---------|---------|--------------------|----------------|------------------|
|         |         | A.V.<br>A.H<br>A.O |                |                  |

**4.- Realiza la gráfica, utiliza regla, colores.****Evaluación**

- Esta actividad se evaluará con una lista de cotejo (Instrumento de evaluación 11)





## Actividad 2

- **Aprendizaje Esperado:** Construye la gráfica y el modelo de funciones racionales de manera colaborativa representando fenómenos sociales o naturales de su contexto y emplea modelos de funciones racionales, favoreciendo el pensamiento crítico, para realizar predicciones e interpretaciones de situaciones presentes en su entorno.
- **Atributo (s):** 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas/7.3 Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana/8.2 Aporta puntos de vistas con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.
- **Conocimiento (s):** Modelo algebraico general de una función racional/modelo gráfico/Asíntotas.

### Lectura previa

Este tema aplicaremos lo aprendido hasta este momento de funciones racionales, grafica, intersecciones y asíntotas para ello analizaremos el siguiente problema.

#### Ejemplo 1

La ley de Poiseuille establece que la resistencia al flujo de sangre a través de un vaso sanguíneo está dada por la función racional:

$$R(r) = C \frac{L}{r^4}$$



Donde C es un constante positiva determinada por la viscosidad de la sangre, L es la longitud del vaso y r el radio del mismo.

¿Cuál es el comportamiento de la función cuando  $C=1$   $L=100$  mm y  $0 < r \leq 4$ ?

¿Qué ocurre con la resistencia R cuando el radio del vaso es muy pequeño o muy grande?

Resolución:

Sustituyendo los valores conocidos en la función:

$$R(r) = 1 \frac{100}{r^4} = \frac{100}{r^4}$$

En primer lugar, identificamos que se trata de una función racional ya que el numerador es una función constante y el denominador una función de cuarto grado. (*división entre dos polinomios*)



Podemos notar que la resistencia depende del radio del vaso sanguíneo (*r es la variable*), para saber que sucede cuando el radio es mayor a cero, pero menor e igual a 4, sustituimos los valores en la función.

Te puedes dar cuenta que el valor de “r” no puede ser cero, ya que sería una indeterminación así que puede ser cualquier valor mayor a cero, pero menor o igual a 4 (condición dada en el problema)

Sustituyendo los valores (0.1, 0.5, 1, 2, 3 y 4) en la función se obtienen los valores para  $R(r)$ :

| r   | $R(r)$  |
|-----|---------|
| 0.1 | 1000000 |
| 0.5 | 1600    |
| 1   | 100     |
| 2   | 6.25    |
| 3   | 1.2345  |
| 4   | 0.3906  |

Dando respuesta a la **primera pregunta planteada**: A medida que el radio aumenta la resistencia disminuye.

**¿Qué ocurre con la resistencia  $R$  cuando el radio del vaso es muy pequeño o muy grande?**

Si el radio del vaso es muy pequeño podemos notar que la resistencia es muy grande por ejemplo cuando el  $r = 0.1$  la resistencia es de 1000000, puedes probar con valores más pequeños.

Cuando el radio es grande la resistencia es menor.

En esta situación podemos darnos cuenta que la asíntota vertical es  $r=0$  ya que puede acercarse a cero, pero nunca podrá ser cero.

Puedes investigar un poco más sobre esta ley de Poiseuille la cual está muy relacionada en física en conductos de fluidos.

## Ejemplo 2

La función  $p(x) = \frac{240x+1400}{14(x+1)}$  representa el porcentaje de residuos de hidrocarburos que permanece en el mar después de ocurrir un derrame en un buque cisterna transportador de petróleo y de efectuarse durante cuatro meses las tareas de recuperación y limpieza por parte de la empresa responsable. Transcurrido ese tiempo, el proceso continúa más lentamente por la acción natural de los procesos de biodegradación.



- a) ¿Qué porcentaje de residuos de petróleo queda al concluir el cuarto mes de la operación de limpia?
- b) Al cabo de un año ¿Podría disminuir a un 10% los contaminantes?
- c) ¿Cuál es el máximo porcentaje de limpieza que se puede obtener de acuerdo con este modelo?

**Resolución:**

Es una función racional ya que el numerador es una función de primer grado al igual que el denominador.

- a) Evaluamos la función para  $x=4$  (ya que es el cuarto mes) 
$$p(4) = \frac{240(4)+1400}{14(4+1)} = 33.71\%$$

**El porcentaje de residuo que hay en el mar cuando se concluye el cuarto mes es 33.71%**

- b) Al cabo de un año son 12 meses, evaluamos para  $x=12$  
$$p(12) = \frac{240(12)+1400}{14(12+1)} = 23.51\%$$

**El porcentaje que hay a los 12 meses es de 23.51%, entonces no puede disminuir a un 10%.**

- c) Para saber cuándo queda en el mar obtenemos la asíntota horizontal, como las dos son de primer grado la asíntota es la división de los coeficientes  $y = \frac{240}{14} = 17.14$  significa que a pesar del transcurso del tiempo siempre habrá un 17.14% de residuos, por lo tanto, el máximo porcentaje de limpieza que se puede obtener es de  $100\% - 17.14\% = 82.86\%$

**Instrucciones:**

- 1.- Analiza y resuelve los siguientes problemas planteados de función racional.
- 2.- Anota los procedimientos y resultados en la libreta de apuntes.
- 3.- Consulta tus dudas a tu profesor.

- a) Cuando dos personas se enamoran ocurre una transformación bioquímica en su organismo y éste libera, en los períodos iniciales de esta etapa, sustancias como feromonas y dopaminas, que producen una doble sensación de aletargamiento e hiperactividad.

La función  $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$  modela el porcentaje promedio de estas sustancias en una persona enamorada.



- Determina la cantidad global de estas sustancias presentes a los cinco meses.
  - ¿En cuánto tiempo, según el modelo, se alcanza el porcentaje máximo y cual es éste?
  - Describe el comportamiento observado en la gráfica. ¿Disminuirá hasta cero el porcentaje de sustancias, conforme avanza el tiempo?
- b) Durante la semana santa la ocupación hotelera en Cancún alcanza su máximo como indica la gráfica de la función  $H(x) = \frac{70000}{2x^2 - 8x + 10}$ , que modela la disminución paulatina en los meses siguientes de temporada baja hasta octubre.
- ¿Cuál es la ocupación durante el mes de enero? ¿Y en febrero?
  - ¿En qué mes se obtuvo la máxima demanda y a cuánto ascendió?
  - ¿Sirve esta función para calcular la afluencia turística en diciembre?
  - ¿En qué meses la ocupación alcanza 10 000 habitaciones?
- c) Para evitar la extinción de los gorilas en África se han creado programas de protección en reservas dentro de su hábitat natural.
- La función  $G(x) = \frac{91.8x + 84}{0.60x + 3}$  representa el aumento en la población de esta especie al reubicar un grupo en un parque natural.
- Dibuja la gráfica y halla la cantidad inicial de individuos de esta especie.
  - ¿En cuánto tiempo la población aumentará a 50 gorilas?
  - ¿Cuál es el límite de aumento previsto para la estabilidad ecológica?

## Evaluación

- Esta actividad se evaluará con una lista de cotejo (Instrumento 12)

### VALORANDO MI AVANCE

Para concluir, contesta en tu libreta las siguientes preguntas con respecto de lo que aprendiste en este bloque:



- ¿Qué estoy aprendiendo?
- ¿En qué aprendizajes esperados aún tengo dificultades?
- ¿Qué acciones puedo realizar para mejorar mi desempeño?
- ¿Qué estrategias de estudio me han funcionado en este bloque?

## BLOQUE IV. Funciones trascendentes

### Actividad 1

- **Aprendizaje Esperado:** Resuelve ecuaciones exponenciales y logarítmicas mediante enfoques gráficos o analíticos, mostrando disposición al trabajo metódico y organizado, para la resolución de problemas de su entorno.
- **Atributo (s):** 1.1 Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades / 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
- **Conocimiento (s):** Funciones exponenciales

#### Lectura previa

Lee con mucha atención el siguiente texto:

#### FUNCIONES EXPONENCIALES

En la naturaleza y en la vida social existen numerosos fenómenos que se rigen por leyes de crecimiento exponencial. Normalmente escuchamos que la población mundial tiene un crecimiento exponencial, pero esto ¿qué quiere decir?

Lo que nos quiere decir esta función es que el crecimiento aumenta o se eleva rápidamente en períodos como, por ejemplo; el pH en una reacción de neutralización, la propagación del sonido, el desarrollo de microorganismos, la medición de movimientos telúricos, entre otros, representados por funciones exponenciales. Estos comportamientos son explicados con funciones en las cuales el exponente es la variable y la base es una constante.

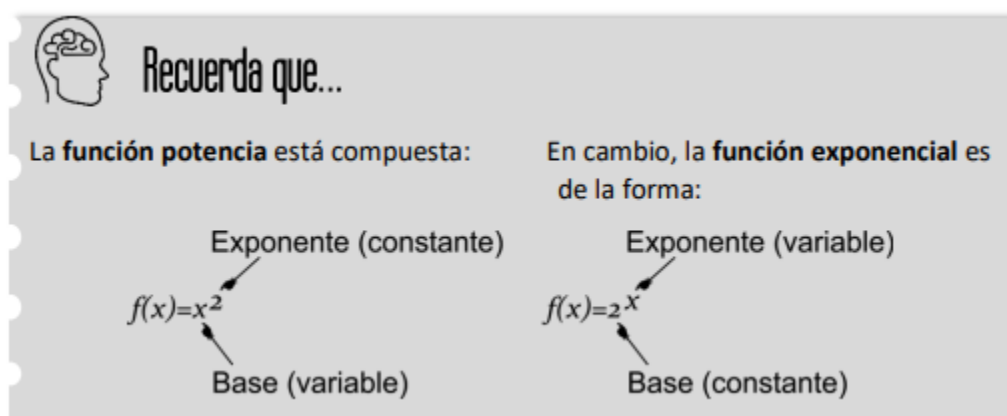


Figura tomada de internet

<https://www.zaragoza.unam.mx/wpcontent/Portal2015/publicaciones/libros/cbiologicas/libros/MATEMATICASCONUNENFOQUEQUIMICOBIOLOGICO1.pdf>

Se llama función exponencial de base “a”, cuando la forma genérica es  $y = a^x$  o  $f(x) = a^x$ , siendo “a” un número positivo distinto de 1 y el exponente “x” es una variable. Por su propia definición, toda función exponencial tiene por dominio de definición el conjunto de los números reales  $\mathbb{R}$ .

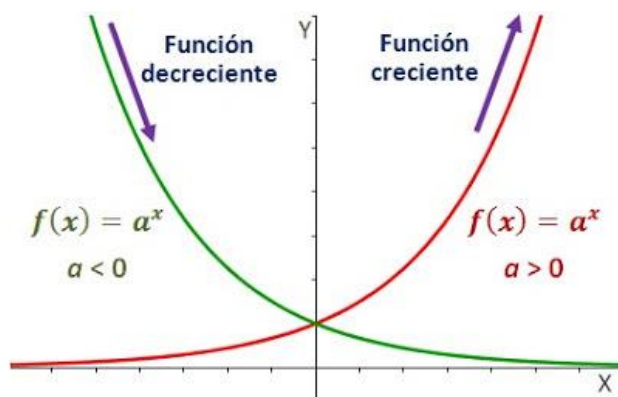


Figura tomada de internet [http://temasdealgebraexponencial.blogspot.com/2017/06/historia-de-la-funcion-exponencial\\_16.html](http://temasdealgebraexponencial.blogspot.com/2017/06/historia-de-la-funcion-exponencial_16.html).

### Base “e”

El número “e”, conocido también como **número de Euler** o **constante de Napier**, es uno de los números reales más relevantes, considerado como el número del cálculo por excelencia. Su valor aproximado es 2.71828...

La función exponencial que tiene como base el número “e” se le denomina como función exponente natural y expresada por:

$$f(x) = e^x$$

La transformación de función exponencial a función natural para a) es una función creciente y para b) es una función decreciente.

**Gráfica de la función exponencial natural, para a) es una función creciente y para b) es una función decreciente.**

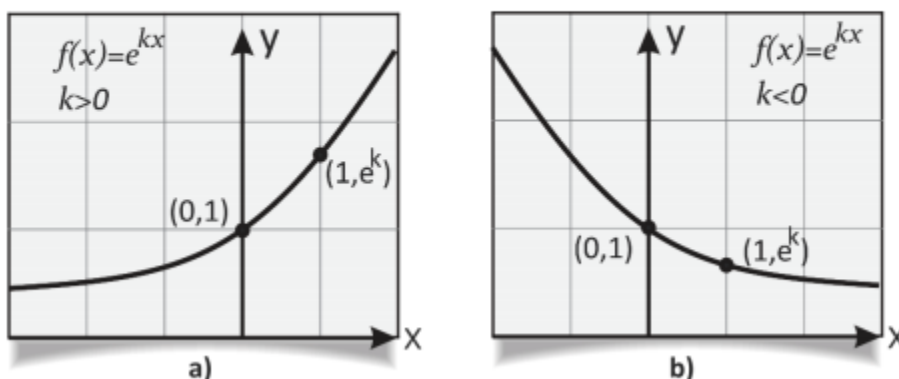


Figura tomada de internet

<https://www.zaragoza.unam.mx/wpcontent/Portal2015/publicaciones/libros/cbiologicas/libros/MATEMATICASCONUNENFOQUEQUIMICOBIOLOGICO1.pdf>



Ejemplo de función exponencial y del procedimiento aplicado para trazar la gráfica:

### Ejemplo 1

$$y = 3^x$$

Se sustituye cada valor propuesto para "x" en la expresión  $y = 3^x$ .

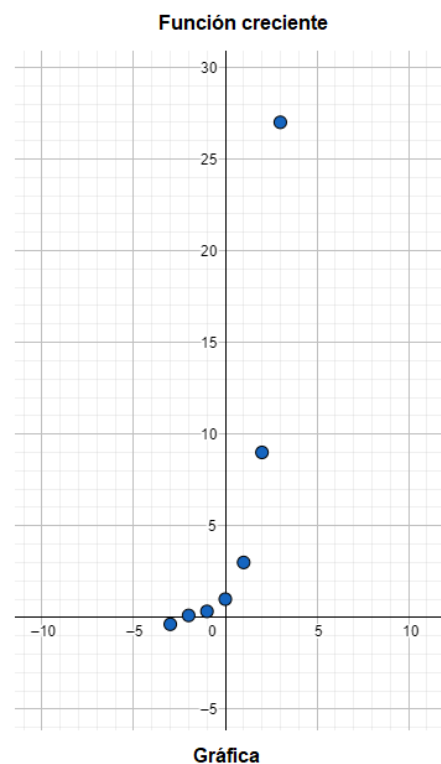
$$y = 3^{(-3)}$$

$$y = 0.0370$$

$$y = 3^{(-2)}$$

$$y = 0.1111$$

| x  | y      |
|----|--------|
| -3 | 0.0370 |
| -2 | 0.1111 |
| -1 | 0.3333 |
| 0  | 1      |
| 1  | 3      |
| 2  | 9      |
| 3  | 27     |



Ejemplo de aplicación de la función exponencial general en el crecimiento poblacional:

### Ejemplo 2

La bacteria *Escherichia coli*, tiene un tiempo duplicación de 20 minutos, en condiciones de laboratorio, considere que se inocula  $2 \times 10^3$  bacterias iniciales, ¿qué cantidad habrá en un día? De manera directa se puede establecer:

$$f(x) = (2 \times 10^3)(2)^{\frac{x}{20}}$$

Donde x es el tiempo en minutos. Un día tiene 1 67440 minutos, por lo que la cantidad de bacterias es:



$$f(x) = (2 \times 10^3)(2)^{\frac{1440}{20}}$$

$$f(x) = 9.44 \times 10^{24} \text{ bacterias}$$

La *E. coli* es una bacteria, bacilo Gram negativo, habitante normal, y más abundante de la microbiota gastrointestinal. Fue descrita por primera vez en 1885 por Theodore Von Escherich, quien la denominó *Bacterium coli commune*. Posteriormente se le adjudicó el nombre de *Escherichia coli* en honor a su descubridor.

### Ejemplo de aplicación de la función exponencial natural:

#### Ejemplo 3

Una colonia de bacterias se coloca en un cultivo adecuado para su crecimiento, la función  $n(t) = n_0 e^{rt}$ , nos dice cómo crece su número. Si inicialmente la colonia está compuesta por 2 000 bacterias y su tasa de crecimiento es del 0.183. ¿Cuántas habrá a los 10 minutos?

#### Datos:

|                               |               |
|-------------------------------|---------------|
| Cantidad inicial de bacterias | $n_0 = 2,000$ |
| Tasa de crecimiento           | $r = 0.183$   |
| Tiempo                        | $t = 10$      |

#### Procedimiento y resultado

$$n(t) = n_0 e^{rt}$$

$$n(10) = (2\,000) e^{(0.183)(10)}$$

$$n(10) = 12,467.77$$

$$n(10) = 12,468 \text{ bacterias}$$

#### Actividad 1.1

#### Instrucciones

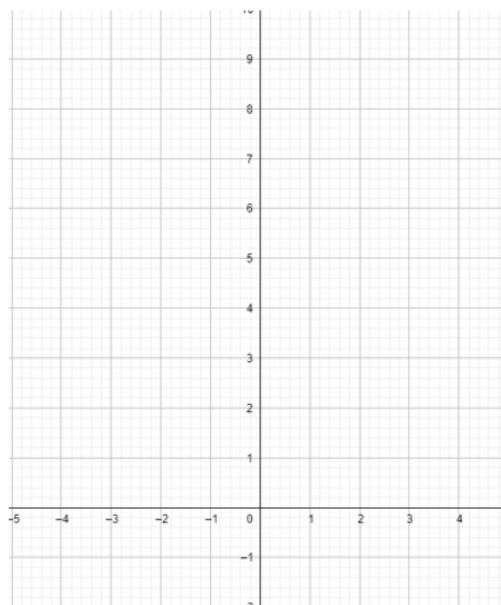
Dada la expresión  $y = 2^x$

1. Realizar la tabulación, aplicando los valores de la tabla.
2. Trazar la gráfica en tu libreta de apuntes.
3. Determinar si es una función creciente o decreciente.





| x  | y |
|----|---|
| -3 |   |
| -2 |   |
| -1 |   |
| 0  |   |
| 1  |   |
| 2  |   |
| 3  |   |



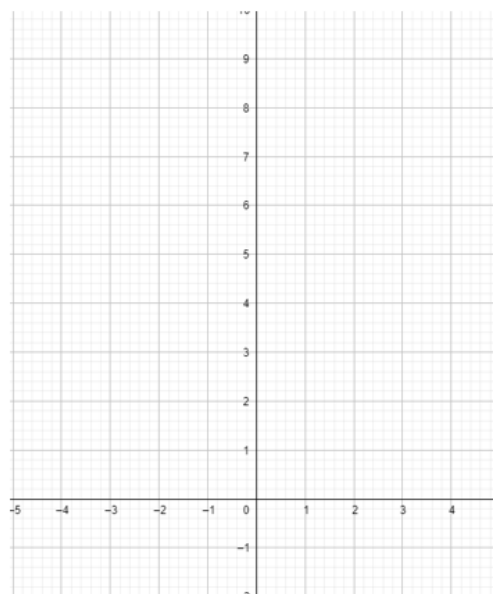
### Actividad 1.2

#### Instrucciones

Dada la expresión  $y = e^{0.5x}$

1. Realizar la tabulación, aplicando los valores de la tabla.
2. Trazar la gráfica en tu libreta de apuntes.
3. Determinar si es una función creciente o decreciente.

| x  | y |
|----|---|
| -3 |   |
| -2 |   |
| -1 |   |
| 0  |   |
| 1  |   |
| 2  |   |
| 3  |   |



**Actividad 1.3****Instrucciones**

1. Resuelve el siguiente problema de aplicación en tu libreta
2. Responde a los cuestionamientos

En cierto laboratorio se cultiva la cepa de una bacteria, causal de múltiples problemas. Con el fin de determinar la rapidez de reproducción de dicha bacteria, esta se coloca en un medio de crecimiento y condiciones favorables. La población existente es de 250 bacterias y se observa que cada hora se duplica la cantidad existente. De lo que se deduce que el modelo exponencial que describe el crecimiento de la colonia es:

$$y = 250 (2)^x$$

- a) ¿Cuántas bacterias habrá al cabo de 3 y 5 horas?
- b) Tabula los datos de la tabla y traza la gráfica

| x<br>horas | y<br>bacterias |
|------------|----------------|
| 0          |                |
| 1          |                |
| 2          |                |
| 3          |                |
| 4          |                |
| 5          |                |
|            |                |

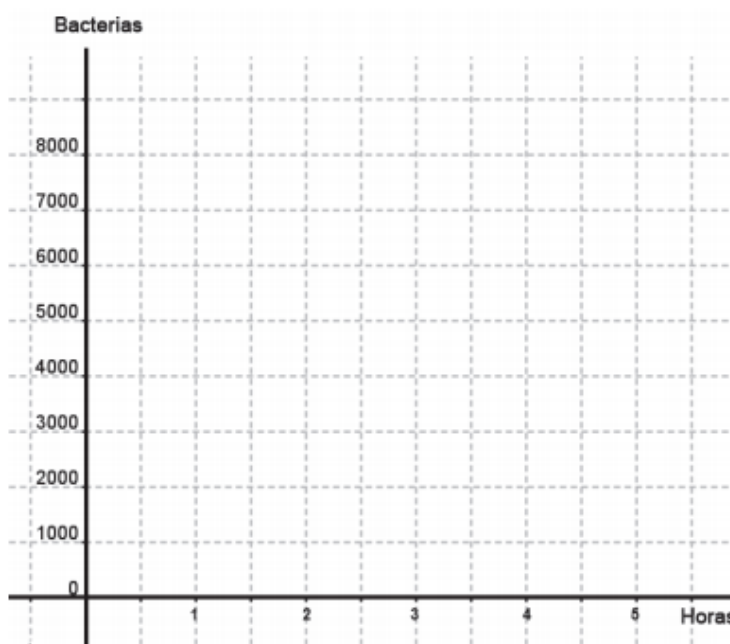


Figura tomada de Enríquez Niebla, G., & Castillo Ceceña, D. (2020, febrero). Material de Apoyo Didáctico - Alumnos CBBC. Recuperado 25 de noviembre de 2020, de <http://alumnos.cobachbc.edu.mx/material/>

**Actividad 1.4****Instrucciones**

1. Resuelve el siguiente problema de aplicación en tu libreta
2. Responde a los cuestionamientos

Un producto derivado de la familia de las cipermetrinas se usa para aniquilar parásitos que destruyen a las plantas del jardín. La función  $y = (10\ 000) e^{-0.1732t}$  proporciona la cantidad de parásitos que sobreviven al cabo de  $t$  horas después de la aplicación.

- a) ¿Cuál es la cantidad inicial de parásitos?
- b) ¿Cuál es la cantidad presente después de 4 horas?

**Evaluación**

- La evaluación de la actividad 1 (1.1, 1.2, 1.3 y 1.4) se realizará con el apoyo del instrumento 13.



## Actividad 2

- **Aprendizaje Esperado:** Resuelve ecuaciones exponenciales y logarítmicas mediante enfoques gráficos o analíticos, mostrando disposición al trabajo metódico y organizado, para la resolución de problemas en su entorno.
- **Atributo (s):** 1.1 Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades / 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
- **Conocimiento (s):** Funciones logarítmicas

### Lectura previa

Lee con mucha atención el siguiente texto:

#### FUNCIÓN LOGARÍTMICA

Una función logarítmica es la función inversa de la exponencial. Se representa como:

$$x = b^y \quad \text{equivale a} \quad y = \log_b x$$

 **Definición**

La función logarítmica, con base  $b > 0$ ,  $b \neq 1$   $f(x) = \log_b x$

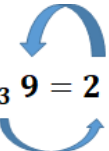
Figura tomada de internet

<https://www.zaragoza.unam.mx/wpcontent/Portal2015/publicaciones/libros/cbiologicas/libros/MATEMATICASCONUNENFOQUEQUIMICOBIOLOGICO1.pdf>

#### Ejemplo 1

$$9 = 3^2 \quad \text{equivale a} \quad 2 = \log_3 9$$

Porque:



$$\log_3 9 = 2 \quad \text{equivale a} \quad 3^2 = 9$$

| Forma exponencial                          | Forma logarítmica                    |
|--------------------------------------------|--------------------------------------|
| $9 = 3^2$                                  | $\log_3 9 = 2$                       |
| $8 = 2^3$                                  | $\log_2 8 = 3$                       |
| $0.0001 = 10^{-4}$                         | $\log_{10} 0.0001 = -4$              |
| $\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ | $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} = 2$ |
| $5 = c^{-3}$                               | $\log_c 5 = -3$                      |

Figura tomada de Enríquez Niebla, G., & Castillo Ceceña, D. (2020, febrero). Material de Apoyo Didáctico - Alumnos CBBC.

Recuperado 25 de noviembre de 2020, de <http://alumnos.cobachbc.edu.mx/material/>

La gráfica de la función logarítmica, se puede obtener como el reflejo de la función exponencial debido a que es la inversa.

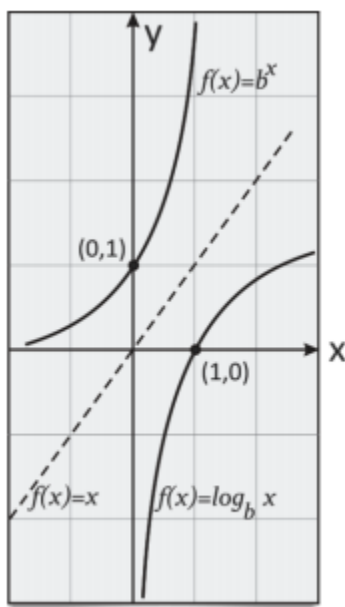


Figura tomada de internet

<https://www.zaragoza.unam.mx/wpcontent/Portal2015/publicaciones/libros/cbiologicas/libros/MATEMATICASCONUNENFOQUEQUIMICOBIOLOGICO1.pdf>

Es importante recordar que el logaritmo común es el exponente al que hay que elevar una base, para obtener otro número determinado. Tienen propiedades de gran utilidad.

**Recuerda que...****Las Leyes de los logaritmos***Para cualquier base  $b > 0$ ,  $b \neq 0$  y números entero positivos*

$$\log ab = \log a + \log b$$

$$\ln ab = \ln a + \ln b$$

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$$

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

$$\log a^x = x \log a$$

$$\ln a^x = x \ln a$$

Figura tomada de internet

<https://www.zaragoza.unam.mx/wpcontent/Portal2015/publicaciones/libros/cbiologicas/libros/MATEMATICASCONUNENFOQUEQUIMICOBIOLOGICO1.pdf>

**Actividad 2****Instrucciones**

1. Aplica la definición de logaritmo para determinar el valor de  $x$ :

|                    |                   |                    |
|--------------------|-------------------|--------------------|
| a) $\log_2 16 = x$ | b) $\log_5 x = 2$ | c) $\log_x 25 = 2$ |
|                    |                   |                    |

2. Aplica las propiedades de los logaritmos en las siguientes expresiones:

|                        |                         |                        |
|------------------------|-------------------------|------------------------|
| a) $\log 6 + \log x =$ | b) $\log \frac{x}{2} =$ | c) $\log x + \log 5 =$ |
|                        |                         |                        |



|                         |                 |                |
|-------------------------|-----------------|----------------|
| d) $\log \frac{8}{x} =$ | e) $\log 5^2 =$ | f) $\log 9x =$ |
|-------------------------|-----------------|----------------|

### Evaluación

- La evaluación de la actividad 2 se realizará con el apoyo del instrumento 13.



## Actividad 3

- **Aprendizaje Esperado:** Utiliza modelos de funciones trascendentes afrontando retos y asumiendo la frustración como parte de un proceso, para realizar predicciones e interpretaciones de situaciones de su entorno.
- **Atributo (s):** 1.1 Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades / 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
- **Conocimiento (s):** Funciones trigonométricas: seno, coseno.

### Lectura previa

Lee con mucha atención el siguiente texto:

#### FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Las funciones trigonométricas son utilizadas en las ciencias naturales para analizar fenómenos periódicos tales como: movimiento ondulatorio, corriente eléctrica alterna, cuerdas vibrantes, ciclos biológicos, etc.

Las funciones trigonométricas son también llamadas funciones periódicas, debido a que después de cierto punto sus formas se vuelven a repetir.

La primera función trigonométrica registrada fue la función “seno”. La función coseno se refiere a que es el complemento de la función seno es decir “*co sinus*”. Estas funciones pueden explicar comportamientos cíclicos, como el desarrollo de la vida misma.

Las características de las funciones seno y coseno son:

- Los valores extremos en el eje de las “y” tanto de la función seno como en coseno es  $[-1, 1]$ .
- Ambas funciones son periódicas, en el intervalo de  $2\pi$ .
- La gráfica de seno es simétrica con respecto al origen y la del coseno es simétrica con respecto al eje “y”.
- La gráfica es la misma de coseno, sólo desplazada  $\frac{\pi}{2}$  unidades hacia la derecha.

Gráfica de la función seno y coseno

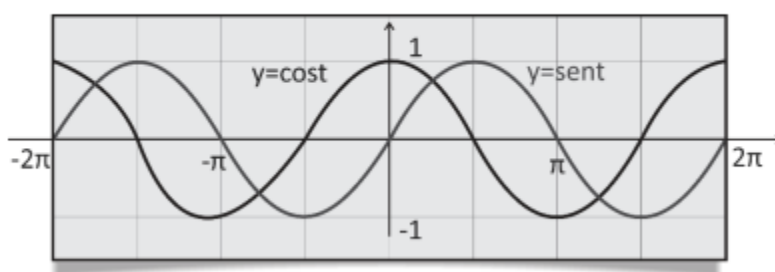


Figura tomada de internet

<https://www.zaragoza.unam.mx/wpcontent/Portal2015/publicaciones/libros/cbiologicas/libros/MATEMATICASCONUNENFOQUEQUIMICOBIOLOGICO1.pdf>





Los grados y los radianes son dos diferentes sistemas para medir ángulos. Un ángulo de  $360^\circ$  equivale a  $2\pi$  radianes; un ángulo de  $180^\circ$  equivale a  $\pi$  radianes (recordemos que  $\pi = 3.14159265359\dots$ ). Las equivalencias entre los cinco principales ángulos se muestran en las siguientes figuras:

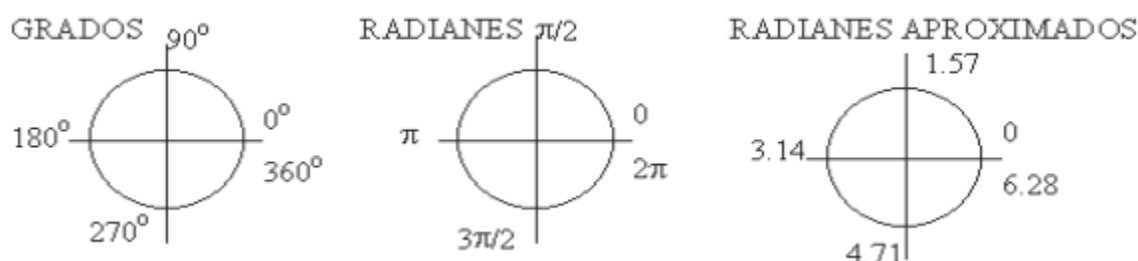


Figura tomada de Enríquez Niebla, G., & Castillo Ceceña, D. (2020, febrero). Material de Apoyo Didáctico - Alumnos CBBC. Recuperado 25 de noviembre de 2020, de <http://alumnos.cobachbc.edu.mx/material/>

### Conversión de grados a radianes y viceversa:

Para convertir de grados a radianes o viceversa, partimos de que: la equivalencia existente entre radián y grados se obtiene al considerar que el ángulo perigonal mide  $360^\circ$  y que la longitud de la circunferencia es  $2\pi$ . Por lo tanto:

$$P = 2\pi = 360^\circ \text{ por lo tanto}$$

$2\pi$  radianes =  $360^\circ$  despejando se obtiene

|                                                                                                                                                                                |                                                                                                                                                                                |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $1 \text{ radián} = \frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{180^\circ}{\pi}$                                                                                                            | $1 \text{ grado} = \frac{2\pi}{360^\circ} \text{ rad} = \frac{\pi}{180^\circ}$                                                                                                 |
| Para convertir la medida de un ángulo expresada en grados a radianes, se multiplica la medida del ángulo por $\frac{\pi}{180^\circ}$ y se realizan las operaciones necesarias. | Para convertir la medida de un ángulo expresada en radianes a grados, se multiplica la medida del ángulo por $\frac{180^\circ}{\pi}$ y se realizan las operaciones necesarias. |
| <p>Ejemplo: Convertir <math>38^\circ</math> a radianes</p> $38^\circ \left( \frac{\pi}{180^\circ} \right) = 0.6632 \text{ radianes}$                                           | <p>Ejemplo: convertir 2.4 radianes a grados</p> $2.4 \left( \frac{180^\circ}{\pi} \right) = 137.50^\circ$                                                                      |

**Actividad 3.1****Instrucciones**

1. Realizar las conversiones:

|                                  |                                  |
|----------------------------------|----------------------------------|
| Convertir 2.35 radianes a grados | Convertir $60^\circ$ a radianes  |
| Convertir $450^\circ$ a radianes | Convertir 0.58 radianes a grados |

**Actividad 3.2****Instrucciones**

1. Completa la tabla con el apoyo de la calculadora científica
2. Posteriormente construye la gráfica

| x radianes       | x grados    | y = sen x |
|------------------|-------------|-----------|
| 0                | 0           |           |
| $\frac{\pi}{6}$  | $30^\circ$  |           |
| $\frac{\pi}{3}$  | $60^\circ$  |           |
| $\frac{\pi}{2}$  | $90^\circ$  |           |
| $\frac{2\pi}{3}$ | $120^\circ$ |           |
| $\frac{5\pi}{6}$ | $150^\circ$ |           |
| $\pi$            | $180^\circ$ |           |
| $\frac{7\pi}{6}$ | $210^\circ$ |           |
| $\frac{5\pi}{3}$ | $240^\circ$ |           |



$$y = \text{sen } x$$

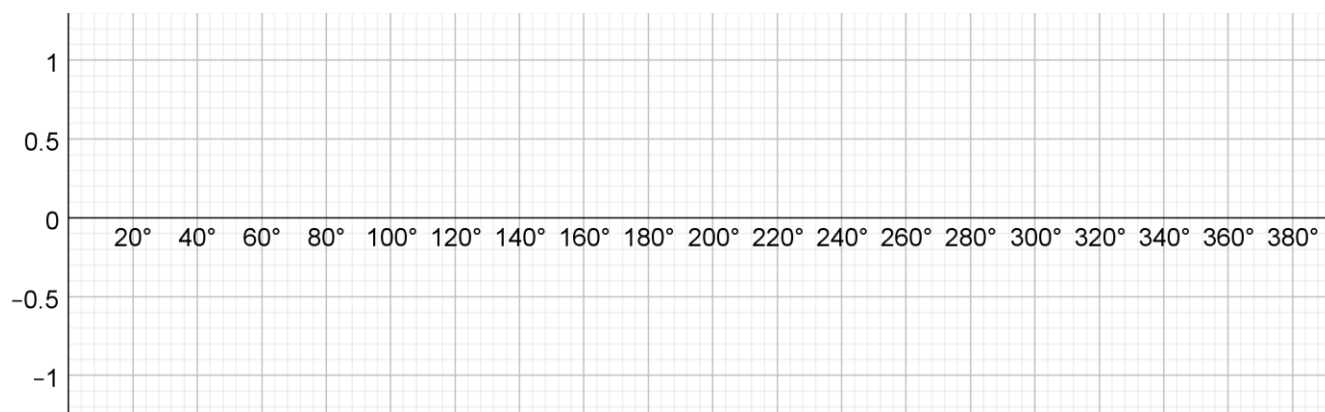


Figura tomada de Enríquez Niebla, G., & Castillo Ceceña, D. (2020, febrero). Material de Apoyo Didáctico - Alumnos CBBC. Recuperado 25 de noviembre de 2020, de <http://alumnos.cobachbc.edu.mx/material/>

3. Responde a la siguiente pregunta: **¿Qué representan los valores que se obtienen en los puntos 0 y  $\pi$  del eje x?**

### Actividad 3.3

#### Instrucciones

1. Completa la tabla con el apoyo de la calculadora científica
2. Posteriormente construye la gráfica

| x radianes       | x grados | y = cos x |
|------------------|----------|-----------|
| 0                | 0        |           |
| $\frac{\pi}{6}$  | 30°      |           |
| $\frac{\pi}{3}$  | 60°      |           |
| $\frac{\pi}{2}$  | 90°      |           |
| $\frac{2\pi}{3}$ | 120°     |           |
| $\frac{5\pi}{6}$ | 150°     |           |
| $\pi$            | 180°     |           |
| $\frac{7\pi}{6}$ | 210°     |           |
| $\frac{5\pi}{3}$ | 240°     |           |

$$y = \cos x$$

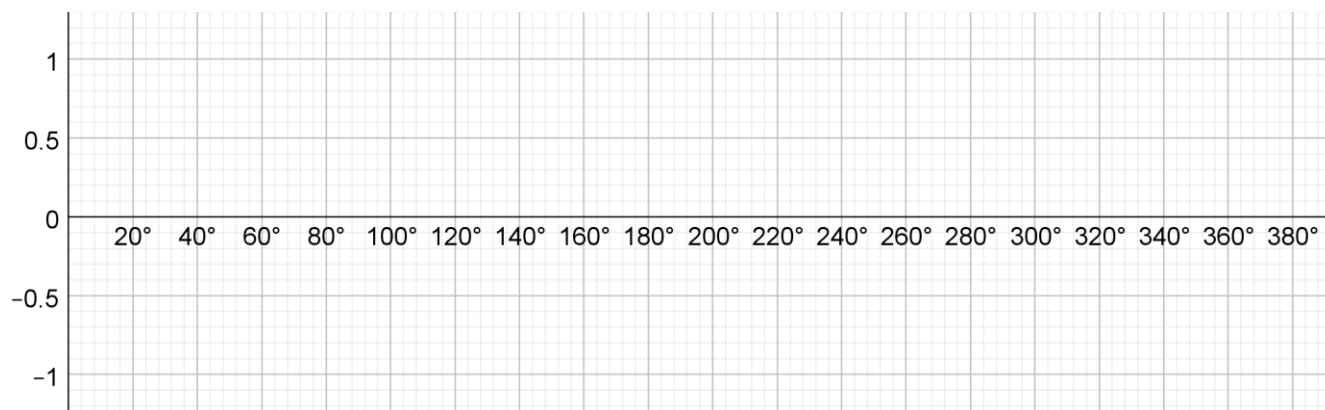


Figura tomada de Enríquez Niebla, G., & Castillo Ceceña, D. (2020, febrero). Material de Apoyo Didáctico - Alumnos CBBC. Recuperado 25 de noviembre de 2020, de <http://alumnos.cobachbc.edu.mx/material/>

3. Responde a la siguiente pregunta: **¿Qué representan los valores que se obtienen en los puntos 0 y  $\pi/2$  del eje x?**

### Evaluación

- La evaluación de la actividad 3 (3.1, 3.2, 3.3) se realizará con el apoyo del instrumento 13.

### VALORANDO MI AVANCE

Para concluir, contesta en tu libreta las siguientes preguntas con respecto de lo que aprendiste en este bloque:



- ¿Qué estoy aprendiendo?
- ¿En qué aprendizajes esperados aún tengo dificultades?
- ¿Qué acciones puedo realizar para mejorar mi desempeño?
- ¿Qué estrategias de estudio me han funcionado en este bloque?

# INSTRUMENTOS PARA EVALUACIÓN

**Instrumento 1.** Lista de cotejo solución de ejercicios.

Se coloca 1 si cumplió con el criterio de evaluación y 0 si no cumplió, posteriormente se multiplica por la ponderación y se anexa el resultado en total, posteriormente se suma los totales para obtener el puntaje total.

**Atributos:** 1.1 Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades / 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas / 5.2 Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones.

|                   |                      |
|-------------------|----------------------|
| PROFESOR:         | INSTITUCIÓN:         |
| ALUMNO:           | SESIÓN:              |
| SEMESTRE Y GRUPO: | FECHA DE APLICACIÓN: |

| Criterios de evaluación                                                                | Cumple |       | Ponderación | Total |
|----------------------------------------------------------------------------------------|--------|-------|-------------|-------|
|                                                                                        | Si = 1 | No =0 |             |       |
| Las actividades se entregaron en tiempo y forma.                                       |        |       | 5           |       |
| El trabajo tiene los datos del alumno en la parte superior derecha.                    |        |       | 5           |       |
| El alumno utiliza correctamente los símbolos de inequación al resolver los ejercicios. |        |       | 30          |       |
| El alumno representa gráficamente los resultados                                       |        |       | 30          |       |
| El alumno utiliza correctamente el concepto de intervalo en la recta numérica.         |        |       | 20          |       |
| El alumno entrega el total de los ejercicios solicitados                               |        |       | 10          |       |
| Total:                                                                                 |        |       |             |       |

**Observaciones:**

---

---

---

**Instrumento 2.** Lista de cotejo solución de problemas

**Atributos:** 1.1 Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades / 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas / 5.2 Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones.

Se coloca 1 si cumplió con el criterio de evaluación y 0 si no cumplió, posteriormente se multiplica por la ponderación y se anexa el resultado en total, posteriormente se suma los totales para obtener el puntaje total.

|                   |                      |
|-------------------|----------------------|
| PROFESOR:         | INSTITUCIÓN:         |
| ALUMNO:           | SESION:              |
| SEMESTRE Y GRUPO: | FECHA DE APLICACION: |

| Criterios de evaluación                                                                                     | Cumple |       | Ponderación | Total |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|-------|-------------|-------|
|                                                                                                             | Si = 1 | No =0 |             |       |
| El trabajo se entregó en tiempo y forma                                                                     |        |       | 10          |       |
| El trabajo tiene los datos del alumno en la parte superior derecha.                                         |        |       | 10          |       |
| El alumno planteó de forma clara y precisa el problema, empleando el concepto de inecuación.                |        |       | 20          |       |
| El alumno utilizó los símbolos adecuados que se vieron en el tema de inecuaciones.                          |        |       | 20          |       |
| El alumno resolvió correctamente las operaciones y despejes indicadas en el planteamiento de la inecuación. |        |       | 20          |       |
| El alumno escribió correctamente la conclusión                                                              |        |       | 20          |       |
| Total:                                                                                                      |        |       |             |       |

**Observaciones:**

---

---

---

**Instrumento 3.** Lista de cotejo solución de ejercicios

**Atributos:** 1.1 Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades / 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas / 5.2 Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones.

Se coloca 1 si cumplió con el criterio de evaluación y 0 si no cumplió, posteriormente se multiplica por la ponderación y se anexa el resultado en total, posteriormente se suma los totales para obtener el puntaje total.

|                   |                      |
|-------------------|----------------------|
| PROFESOR:         | INSTITUCIÓN:         |
| ALUMNO:           | SESIÓN:              |
| SEMESTRE Y GRUPO: | FECHA DE APLICACIÓN: |

| Criterios de evaluación                                                                                        | Cumple |      | Ponderación | Total |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|------|-------------|-------|
|                                                                                                                | Si = 1 | No=0 |             |       |
| La actividad se entregó en tiempo y forma                                                                      |        |      | 10          |       |
| La actividad tiene en la parte superior derecha los datos del alumno (Nombre, Grupo, Fecha)                    |        |      | 10          |       |
| El alumno identifica correctamente una función o relación y responde correctamente cada uno de los ejercicios. |        |      | 40          |       |
| Comprende y sigue ejemplos para aplicarlos en los ejercicios.                                                  |        |      | 10          |       |
| El alumno justifica correctamente cada respuesta                                                               |        |      | 20          |       |
| Las respuestas están visibles y con diferente tinta.                                                           |        |      | 10          |       |
| Total:                                                                                                         |        |      |             |       |

Observaciones:

---

---

---

**Instrumento 4.** Lista de cotejo solución de ejercicios

**Atributos:** 1.1 Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades / 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas / 5.2 Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones.

Se coloca 1 si cumplió con el criterio de evaluación y 0 si no cumplió, posteriormente se multiplica por la ponderación y se anexa el resultado en total, posteriormente se suma los totales para obtener el puntaje total.

|                   |                      |
|-------------------|----------------------|
| PROFESOR:         | INSTITUCIÓN:         |
| ALUMNO:           | SESION:              |
| SEMESTRE Y GRUPO: | FECHA DE APLICACION: |

| Criterios de evaluación                                                                     | Cumple |      | Ponderación | Total |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|--------|------|-------------|-------|
|                                                                                             | Si = 1 | No=0 |             |       |
| La actividad se entregó en tiempo y forma                                                   |        |      | 10          |       |
| La actividad tiene en la parte superior derecha los datos del alumno (Nombre, Grupo, Fecha) |        |      | 5           |       |
| Los ejercicios están enumerados correctamente y con diferente tinta.                        |        |      | 10          |       |
| El alumno identifica correctamente el dominio                                               |        |      | 15          |       |
| El alumno identifica correctamente el codominio                                             |        |      | 15          |       |
| El alumno plantea correctamente la ecuación de cada uno de los diagramas.                   |        |      | 20          |       |
| El alumno evalúa y encuentra las imágenes faltantes de cada uno de los ejercicios           |        |      | 20          |       |
| La actividad se encuentra limpio y sin tachaduras                                           |        |      | 5           |       |
| Total:                                                                                      |        |      |             |       |

Observaciones:

---

---

---



**Instrumento 5.** Lista de cotejo solución de ejercicios

**Atributos:** 1.1 Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades / 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas / 5.2 Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones

Se coloca 1 si cumplió con el criterio de evaluación y 0 si no cumplió, posteriormente se multiplica por la ponderación y se anexa el resultado en total, posteriormente se suma los totales para obtener el puntaje total.

|                   |                      |
|-------------------|----------------------|
| PROFESOR:         | INSTITUCIÓN:         |
| ALUMNO:           | SESION:              |
| SEMESTRE Y GRUPO: | FECHA DE APLICACION: |

| Criterios de evaluación                                                                     | Cumple |      | Ponderación | Total |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|--------|------|-------------|-------|
|                                                                                             | Si = 1 | No=0 |             |       |
| La actividad se entregó en tiempo y forma                                                   |        |      | 5           |       |
| La actividad tiene en la parte superior derecha los datos del alumno (Nombre, Grupo, Fecha) |        |      | 5           |       |
| Los ejercicios están enumerados correctamente y con diferente tinta.                        |        |      | 5           |       |
| El alumno identifica correctamente la clasificación de las funciones                        |        |      | 20          |       |
| El alumno identifica realiza correctamente la gráfica de la función constante               |        |      | 20          |       |
| El alumno realiza correctamente la gráfica del problema 2 inciso b).                        |        |      | 20          |       |
| El alumno escribe correctamente el nombre de cada una de las gráficas del inciso c)         |        |      | 20          |       |
| La actividad se encuentra limpio y sin tachaduras                                           |        |      | 5           |       |
| Total:                                                                                      |        |      |             |       |

Observaciones:

---

---

---

**Instrumento 6.** Lista de cotejo función inversa

**Atributos:** 1.1 Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades / 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas / 5.2 Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones

Se coloca 1 si cumplió con el criterio de evaluación y 0 si no cumplió, posteriormente se multiplica por la ponderación y se anexa el resultado en total, posteriormente se suma los totales para obtener el puntaje total.

|                   |                      |
|-------------------|----------------------|
| PROFESOR:         | INSTITUCIÓN:         |
| ALUMNO:           | SESION:              |
| SEMESTRE Y GRUPO: | FECHA DE APLICACION: |

| Criterios de evaluación                                                                     | Cumple |      | Ponderación | Total |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|--------|------|-------------|-------|
|                                                                                             | Si = 1 | No=0 |             |       |
| La actividad se entregó en tiempo y forma                                                   |        |      | 5           |       |
| La actividad tiene en la parte superior derecha los datos del alumno (Nombre, Grupo, Fecha) |        |      | 5           |       |
| Los ejercicios están enumerados correctamente y con diferente tinta.                        |        |      | 5           |       |
| El alumno realiza correctamente los cambios de variables                                    |        |      | 20          |       |
| El alumno realiza los despejes correctamente                                                |        |      | 20          |       |
| El alumno realiza correctamente las operaciones indicadas                                   |        |      | 20          |       |
| El alumno escribe correctamente la función inversa                                          |        |      | 20          |       |
| La actividad se encuentra limpio y sin tachaduras                                           |        |      | 5           |       |
| Total:                                                                                      |        |      |             |       |

Observaciones:

---



---



---

**Instrumento 7.** Lista de cotejo funciones crecientes y decrecientes

**Atributos:** 1.1 Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades / 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas / 5.2 Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones

Se coloca 1 si cumplió con el criterio de evaluación y 0 si no cumplió, posteriormente se multiplica por la ponderación y se anexa el resultado en total, posteriormente se suma los totales para obtener el puntaje total.

|                   |                      |
|-------------------|----------------------|
| PROFESOR:         | INSTITUCIÓN:         |
| ALUMNO:           | SESION:              |
| SEMESTRE Y GRUPO: | FECHA DE APLICACION: |

| Criterios de evaluación                                                                          | Cumple |      | Ponderación | Total |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|------|-------------|-------|
|                                                                                                  | Si = 1 | No=0 |             |       |
| La actividad se entregó en tiempo y forma                                                        |        |      | 10          |       |
| La actividad tiene en la parte superior derecha los datos del alumno (Nombre, Grupo, Fecha)      |        |      | 10          |       |
| Los ejercicios están enumerados correctamente y con diferente tinta.                             |        |      | 10          |       |
| El alumno identifica correctamente el tipo de función                                            |        |      | 30          |       |
| El alumno remarca correctamente de acuerdo a los colores las funciones crecientes y decrecientes |        |      | 30          |       |
| La actividad se encuentra limpio y sin tachaduras                                                |        |      | 10          |       |
| Total:                                                                                           |        |      |             |       |

Observaciones:

---

---

---

**Instrumento 8.** Lista de cotejo transformación de gráficas

**Atributos:** 1.1 Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades / 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas / 5.2 Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones

Se coloca 1 si cumplió con el criterio de evaluación y 0 si no cumplió, posteriormente se multiplica por la ponderación y se anexa el resultado en total, posteriormente se suma los totales para obtener el puntaje total.

|                   |                      |
|-------------------|----------------------|
| PROFESOR:         | INSTITUCIÓN:         |
| ALUMNO:           | SESION:              |
| SEMESTRE Y GRUPO: | FECHA DE APLICACION: |

| Criterios de evaluación                                                                     | Cumple |      | Ponderación | Total |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|--------|------|-------------|-------|
|                                                                                             | Si = 1 | No=0 |             |       |
| La actividad se entregó en tiempo y forma                                                   |        |      | 10          |       |
| La actividad tiene en la parte superior derecha los datos del alumno (Nombre, Grupo, Fecha) |        |      | 10          |       |
| Los ejercicios están enumerados correctamente y con diferente tinta.                        |        |      | 10          |       |
| El alumno identifica correctamente el tipo de traslación de cada ejercicio                  |        |      | 30          |       |
| El alumno realiza correctamente las 3 gráficas y con diferente tinta                        |        |      | 30          |       |
| La actividad se encuentra limpio y sin tachaduras                                           |        |      | 10          |       |
| Total:                                                                                      |        |      |             |       |

Observaciones:

---



---



---

**Instrumento 9.** Lista de cotejo composición de funciones

**Atributos:** 1.1 Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades / 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas / 5.2 Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones

Se coloca 1 si cumplió con el criterio de evaluación y 0 si no cumplió, posteriormente se multiplica por la ponderación y se anexa el resultado en total, posteriormente se suma los totales para obtener el puntaje total.

|                   |                      |
|-------------------|----------------------|
| PROFESOR:         | INSTITUCIÓN:         |
| ALUMNO:           | SESION:              |
| SEMESTRE Y GRUPO: | FECHA DE APLICACION: |

| Criterios de evaluación                                                                     | Cumple |      | Ponderación | Total |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|--------|------|-------------|-------|
|                                                                                             | Si = 1 | No=0 |             |       |
| La actividad se entregó en tiempo y forma                                                   |        |      | 10          |       |
| La actividad tiene en la parte superior derecha los datos del alumno (Nombre, Grupo, Fecha) |        |      | 10          |       |
| Los ejercicios están enumerados correctamente y con diferente tinta.                        |        |      | 10          |       |
| El alumno plantea la función a evaluar                                                      |        |      | 20          |       |
| El alumno sustituye correctamente cada uno de las funciones                                 |        |      | 20          |       |
| El alumno resuelve correctamente las operaciones indicadas y expresa el resultado correcto  |        |      | 20          |       |
| La actividad se encuentra limpio y sin tachaduras                                           |        |      | 10          |       |
| Total:                                                                                      |        |      |             |       |

Observaciones:

---



---



---

**Instrumento 10.** Lista de cotejo funciones polinomiales

**Atributos:** 1.1 Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades / 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas

Se coloca una X si cumplió con el criterio de evaluación o si no cumplió, se obtiene la ponderación y se anexa el resultado en total, posteriormente se suma los totales para obtener el puntaje total.

|                   |                      |
|-------------------|----------------------|
| PROFESOR:         | INSTITUCIÓN:         |
| ALUMNO:           | SESION:              |
| SEMESTRE Y GRUPO: | FECHA DE APLICACION: |

|                                                                                                                                                        |               |             |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------|-------------|
| PRESENTACIÓN                                                                                                                                           |               |             |
| INDICADORES                                                                                                                                            | CUMPLE        | PONDERACIÓN |
| 1. Se entrega de manera limpia y ordenado el trabajo.                                                                                                  | Si ( ) No ( ) | 5%          |
| 2. El trabajo es entregado en tiempo y forma.                                                                                                          | Si ( ) No ( ) | 5%          |
| 3. Contiene los datos del estudiante: Nombre completo, tarea #, fecha, semestre y grupo.                                                               | Si ( ) No ( ) | 5%          |
| 4. No se encuentra la teoría combinada con los resultados de los ejercicios.                                                                           | Si ( ) No ( ) | 5%          |
| Total: Máximo 20%                                                                                                                                      |               |             |
| RESOLUCIÓN                                                                                                                                             |               |             |
| 1. Los ejercicios presentan una solución matemática mediante pasos ordenados.                                                                          | Si ( ) No ( ) | 5%          |
| 2. Se presentan todos los procesos de solución del ejercicio completo.                                                                                 | Si ( ) No ( ) | 5%          |
| 3. Los resultados son remarcados al final de cada ejercicio para su verificación.                                                                      | Si ( ) No ( ) | 5%          |
| 4. Se hacen las construcciones gráficas en los ejercicios que así lo ameritan o lo indican en las instrucciones.                                       | Si ( ) No ( ) | 5%          |
| 5. Las operaciones se presentan de manera condensada, sin tantos pasos, haciendo alusión al uso de la calculadora (científica o del teléfono celular). | Si ( ) No ( ) | 5%          |
| 6. Hace las interpretaciones pertinentes en cada uno de los ejercicios que lo solicite.                                                                | Si ( ) No ( ) | 5%          |
| Total: Máximo 30%                                                                                                                                      |               |             |
| VERIFICACIÓN DE CADA EJERCICIO                                                                                                                         |               |             |



|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |  |  |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|--|
| <p>El profesor se encargará de llevar a cabo una revisión de cada uno de los resultados y procedimientos completos para poder asignar una puntuación máximo del 50%. Todo esto dependerá de los siguientes rubros:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>a) Procedimiento (el profesor tiene la decisión de contemplar puntos parciales o no por tener un proceso correcto)</li> <li>b) Resultado (el profesor tiene la decisión de contemplar puntos parciales por respuesta incorrecta, pero procedimiento correcto, por unidades o variaciones en las numeraciones)</li> <li>c) Ponderación del 50% a cada uno de los ejercicios de cada actividad, según la complejidad que esté presente.</li> </ul> |  |  |
| Total: 50% máximo                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |  |  |
| Presentación                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |  |  |
| Resolución                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |  |  |
| Verificación                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |  |  |
| Total:                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |  |  |

|                                                                                                                                                                                                                                      |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Observaciones:</p> <hr style="border: 0; border-top: 1px solid black; margin: 5px 0;"/> <hr style="border: 0; border-top: 1px solid black; margin: 5px 0;"/> <hr style="border: 0; border-top: 1px solid black; margin: 5px 0;"/> |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**Instrumento 11.** Lista de cotejo funciones racionales

**Atributos:** 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas/7.3 Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana

| PROFESOR:                                                                                                                                                                                                                             | INSTITUCIÓN:         |      |             |       |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|------|-------------|-------|
| ALUMNO:                                                                                                                                                                                                                               | SESIÓN:              |      |             |       |
| SEMESTRE Y GRUPO:                                                                                                                                                                                                                     | FECHA DE APLICACIÓN: |      |             |       |
| DIMENSIONES O CRITERIOS A EVALUAR                                                                                                                                                                                                     | Cumple               |      | Ponderación | Total |
|                                                                                                                                                                                                                                       | Si=1                 | No=0 |             |       |
| Presenta su actividad en tiempo y forma                                                                                                                                                                                               |                      |      | 10          |       |
| Obtiene correctamente:<br>a) Dominio de la función<br>b) Asíntotas (vertical, horizontal u oblicua de acuerdo al ejercicio)<br>c) Intersecciones con los ejes.<br>d) Valores de $f(x)$ en la tabulación.<br>e) Bosquejo de la gráfica |                      |      | 80          |       |
| Presenta ordenada y organizada su actividad.                                                                                                                                                                                          |                      |      | 10          |       |
| Total                                                                                                                                                                                                                                 |                      |      |             |       |

Observaciones:

---



---



---



**Instrumento 12.** Lista de cotejo funciones racionales

**Atributos:** 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas/7.3 Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana

| PROFESOR:                                                                   | INSTITUCIÓN:         |      |             |       |
|-----------------------------------------------------------------------------|----------------------|------|-------------|-------|
| ALUMNO:                                                                     | SESIÓN:              |      |             |       |
| SEMESTRE Y GRUPO:                                                           | FECHA DE APLICACIÓN: |      |             |       |
| DIMENSIONES O CRITERIOS A EVALUAR                                           | Cumple               |      | Ponderación | Total |
|                                                                             | Si=1                 | No=0 |             |       |
| Presenta su actividad en tiempo y forma                                     |                      |      | 10          |       |
| a) Realiza los procedimientos para dar solución a cada uno de los problemas |                      |      | 20          |       |
| b) Halla la solución correcta a cada uno de los problemas solicitados.      |                      |      | 60          |       |
| Presenta ordenada y organizada su actividad.                                |                      |      | 10          |       |
| Total                                                                       |                      |      |             |       |

Observaciones:

---

---

---

**Instrumento 13.** Solución de ejercicios funciones trascendentes

|                   |                      |
|-------------------|----------------------|
| PROFESOR:         | INSTITUCIÓN:         |
| ALUMNO:           | SESION:              |
| SEMESTRE Y GRUPO: | FECHA DE APLICACION: |

**Atributos:** 1.1 Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades / 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas

| <b>Instrucciones:</b> Lee los indicadores y señala con una x en la escala de valoración, si cumple o no según corresponda. |                                                                                                                    |                      |         |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|---------|
|                                                                                                                            | Indicadores                                                                                                        | Escala de valoración |         |
|                                                                                                                            |                                                                                                                    | NO<br>1              | SI<br>2 |
|                                                                                                                            | La solución de la actividad muestra limpieza                                                                       |                      |         |
|                                                                                                                            | Incluye el procedimiento empleado para la solución de cada ejercicio.                                              |                      |         |
|                                                                                                                            | Emplea el método adecuado para resolver cada problema, obteniendo la respuesta correcta en el entorno de cada uno. |                      |         |
|                                                                                                                            | Expresa correctamente el resultado obtenido.                                                                       |                      |         |
|                                                                                                                            | Construye adecuadamente la gráfica con base en la función correspondiente.                                         |                      |         |
| Puntaje total obtenido:                                                                                                    |                                                                                                                    |                      |         |

Observaciones:

---

---

---



## MATERIAL SUGERIDO PARA CONSULTA

Cuellar, J. (2010). *Álgebra*. México: Editorial Mac Graw Hill. Segunda edición.

Función Exponencial - Ejercicios Nivel 1 - Introducción. (2017, 30 octubre). [Archivo de vídeo].

Recuperado de <https://www.youtube.com/watch?v=Atf1UtHR7uw>

Funciones exponenciales y logarítmicas. (s. f.). Recuperado de

<http://www.prepa5.unam.mx/wwwP5/profesor/publicacionMate/06III.pdf>

Función Logarítmica - Ejercicios Nivel 1 - Intro. (2017, 6 noviembre). [Archivo de vídeo]. Recuperado

de <https://www.youtube.com/watch?v=EDCXR0WUC5k>

Función Trigonométrica Seno - Ejercicios Resueltos. (2016, 21 marzo). [Archivo de vídeo]. Recuperado

de <https://www.youtube.com/watch?v=JwGW8YyNp4M>

Gustafson, R. David (1997). *Álgebra intermedia*, México: Editorial Thomson.

Larson, R. Falvo, D. (2012). *Precálculo*. México: Cengage Learning Editores. Octava edición

Mclases (2011, 20 agosto). Concepto de función. [Archivo de vídeo]. Recuperado de

[https://www.youtube.com/watch?v=N5HX4spFVaA&feature=emb\\_logo](https://www.youtube.com/watch?v=N5HX4spFVaA&feature=emb_logo)

Ríos, Alicia (2018). *Matemáticas IV*. Colima: Editorial, conexión. primera edición



## BIBLIOGRAFÍA

- Basto, J. R. (2019). *Matemáticas 4, Precálculo, funciones y aplicaciones*. México, D.F. : Patria.
- Colegio de Bachilleres del Estado de Quintana Roo (2013). *Guía didáctica: Matemáticas IV*. México: COBAQROO
- Cuellar, J. (2010). *Álgebra*. México: Editorial, Mac Graw Hill. Segunda edición.
- Dirección General de Bachillerato (2017). *Programa de estudio: Matemáticas IV*. México: DGB
- Domínguez, Rosa (2015). *Matemáticas IV*. Jalisco: Editorial Umbral. Primera edición.
- Enríquez Niebla, G., & Castillo Ceceña, D. (2020, febrero). Material de Apoyo Didáctico - Alumnos CBBC. Recuperado 25 de noviembre de 2020, de <http://alumnos.cobachbc.edu.mx/material/>
- Flores Jacinto, P., Cárdenas, M. C., & García, E. (2018). *Matemáticas I con un enfoque químico, biológico* (Primera ed., Vol. 1). Recuperado de <https://www.zaragoza.unam.mx/wpcontent/Portal2015/publicaciones/libros/cbiologicas/libros/MATEMATICASCONUNENFOQUEQUMICOBIOLOGICO1.pdf>
- Función base e - Mate09. (s. f.). Recuperado 24 de noviembre de 2020, de <https://sites.google.com/site/mate09alb/cuarto-parcial/funcion-base-e>
- Gutiérrez, R. M., & Pérez, B. A. (2015). *Matemáticas IV* (Primera ed.). México: Umbral.
- Gustafson, R. David (1997). *Álgebra intermedia*, México: Editorial Thomson.
- Hinojosa, A. M. (2014). *Matemáticas IV* (Tercera ed.). México: Santillana.
- hiru.es. (s. f.). Recuperado 24 de noviembre de 2020, de <https://www.hiru.eus/es/matematicas/funcionexponencial>
- Larson, R. Falvo, D. (2012). *Precálculo*. México: Cengage Learning Editores. Octava edición
- Ríos, Alicia (2018). *Matemáticas IV*. Colima: Editorial, conexión. primera edición
- Stewart, J., Redlin, L., & Watson, S. (s.f.). *Precálculo. Matemáticas para el cálculo*. México, D.F. : THOMSON.
- Velázquez, Mireya (2012). *Matemáticas IV*. México. Editorial Gafra. Primera edición